

# Congresso Brasileiro de Sistemas Fuzzy

## Sistemas p-Fuzzy e Aplicações

---

Laécio Carvalho de Barros

Vinícius F. Wasques

Estevão Esmi

Daniel E. Sánchez

Francielle Santo Pedro Simões

## 1 Dia 1: Introdução aos Sistemas Baseados em Regras Fuzzy

- Motivação
- Introdução
- Subconjuntos fuzzy
- Relações fuzzy
- Sistema Baseado em Regras Fuzzy
- Método de inferência fuzzy de Mamdani
- Método de inferência fuzzy de Larsen
- Método de inferência fuzzy de Tagaki-Sugeno

## 2 Dia 2 - Sistemas P-Fuzzy: Modelos Populacionais

- Aplicações em modelos populacionais de Malthus e Verhulst
- Aplicações em modelo presa-predador de Lotka-Volterra
- Equilíbrio e estabilidade de sistemas baseados em regras

## 3 Dia 3 - Sistemas p-fuzzy: Epidemiologia, Química e Economia

- Aplicações em modelos epidemiológicos
- Aplicações em modelos químicos
- Aplicações em modelos econômicos

- Estudar sistemas evolutivos discretos ou contínuos, em que o campo de direções é parcialmente conhecido;
- Fornecer ferramentas para analisar sistemas dinâmicos sem ter um conhecimento aprofundado em equações diferenciais;
- Utilizar o conhecimento parcial ou experiência de um profissional para descrever o comportamento de um sistema, através da teoria de conjuntos fuzzy.

Esse minicurso utiliza conceitos na área de lógica fuzzy, que surgem através da modelagem de variáveis linguísticas como “em torno de”, “aproximadamente”, “alto” e “baixo” de modo a relaxar a propriedade atribuída à variável.

Na literatura o termo “lógica fuzzy” é usado de duas formas diferentes:

- na teoria conjuntista a fim de manipular informações inexatas, através de uma teoria de conjunto fuzzy geral;
- no sentido de “cálculo proposicional”, de modo a estender a lógica clássica.

A formulação matemática de incertezas via lógica fuzzy se diferencia da probabilidade.

Enquanto a estatística lida com incertezas antes dos eventos ocorrerem, a matemática fuzzy considera incertezas mesmo após o evento.

Por exemplo, no lançamento de uma moeda a probabilidade estima a “chance” de cara ou coroa, sendo que após o lançamento não há incerteza.

Enquanto a lógica fuzzy infere sobre o resultado, se as faces da moeda não são nítidas.



Figura: Imagens retiradas de: <https://www.istockphoto.com/br>

O foco do minicurso é modelar sistemas de equações diferenciais e/ou a diferenças, através de sistemas parcialmente fuzzy (sistemas p-fuzzy).

Tais sistemas reproduzem “trajetórias” que aproximam trajetórias de sistema dinâmico clássico cujo campo é determinado por uma função teórica  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ .

A estratégia é modelar a função  $f$  por um controlador fuzzy

$$f(x) \simeq D(I(F(x))),$$

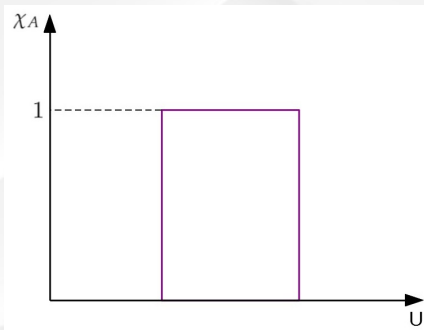
em que

- $F$  é um operador (fuzzificador) que associa cada entrada  $x \in \mathbb{R}^n$  a um conjunto fuzzy;
- $I$  é um método de inferência fuzzy;
- $D$  é um operador (defuzzificador) que associa cada conjunto fuzzy a um vetor em  $\mathbb{R}^m$ .

Dado um subconjunto  $A$  de um universo  $U$ , a função característica de  $A$ ,  $\chi_A : U \rightarrow \{0, 1\}$ , é definida por

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in A \\ 0, & \text{se } x \notin A \end{cases} .$$

A função característica de um número real  $a \in \mathbb{R}$  é dada por  $\chi_{\{a\}}(x) = 1$ , se  $x = a$  ou  $\chi_{\{a\}}(x) = 0$ , se  $x \neq a$ .



## Exemplo de conjunto *crisp*

Considere o conjunto  $F$  dos números naturais pequenos:

$$F = \{n \in \mathbb{N} : n \text{ é pequeno}\}.$$

Se a propriedade “pequeno” for precisamente definida, temos:

$$\varphi_F(0) = \varphi_F(1) = \varphi_F(2) = \varphi_F(3) = \varphi_F(4) = 1 \text{ e } \varphi_F(5) = \varphi_F(6) = \dots = 0.$$

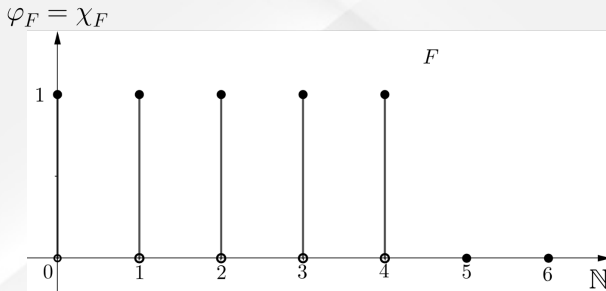


Figura: Representação gráfica do conjunto clássico  $F = \{n \in \mathbb{N} : n \leq 4\}$ .



## Definição de subconjunto fuzzy

Seja  $U$  um conjunto universo. O subconjunto fuzzy  $A$  de  $U$  é caracterizado por sua função de pertinência  $\varphi_A : U \rightarrow [0, 1]$ .

A função de pertinência deve ser entendida da seguinte forma. O valor  $\varphi_A(x)$  em  $[0, 1]$  é o grau de pertinência que o elemento  $x$  está em  $A$ , de modo que sua pertinência a  $A$  é tanto maior quanto maior for  $\varphi_A(x)$ .

No exemplo anterior a propriedade “pequeno” é precisamente definida. No entanto, dependendo da situação, não é razoável que 4 seja considerado “pequeno” enquanto 5 não.

Com intuito de não fazer uma passagem “brusca” podemos adotar uma função para descrever essa passagem mais suave.

**Propriedade:** Se  $x$  for pequeno e  $y \leq x$ , então  $y$  também deve ser pequeno, ou seja, a função  $\varphi_F$  deve ser decrescente.

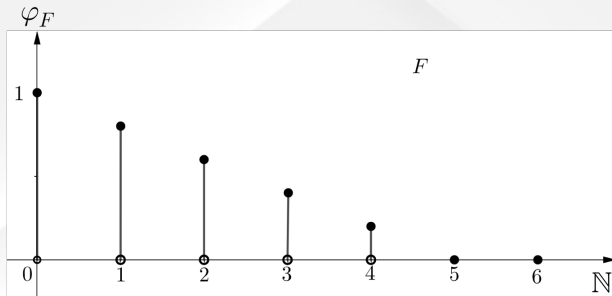
## Exemplo de conjunto *fuzzy*

Considere a seguinte função de pertinência:

$$\varphi_F(n) = \begin{cases} \frac{5-n}{5} & , \text{ se } 0 \leq n \leq 4 \\ 0 & , \text{ se } n > 4 \end{cases} . \quad (1)$$

Os números 0, 1, 2, 3, 4 são considerados pequenos, mas com diferentes graus de pertinência.

$$\varphi_F(0) = 1, \quad \varphi_F(1) = 0,8, \quad \varphi_F(2) = 0,6, \quad \varphi_F(3) = 0,4 \text{ e } \varphi_F(4) = 0,2.$$



# Operações entre conjuntos fuzzy

1. **União:** A união entre conjuntos fuzzy é dada pela função de pertinência

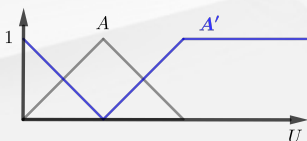
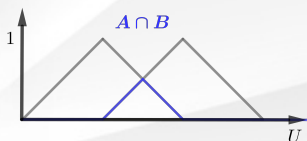
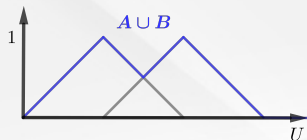
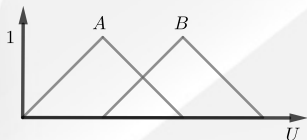
$$\varphi_{A \cup B}(x) = \max\{\varphi_A(x), \varphi_B(x)\}, \forall x \in U$$

2. **Intersecção:** A intersecção entre conjuntos fuzzy é dada pela função de pertinência

$$\varphi_{A \cap B}(x) = \min\{\varphi_A(x), \varphi_B(x)\}, \forall x \in U;$$

3. **Complemento:** O complementar ( $A'$ ) de um conjunto fuzzy  $A$  é dada pela função de pertinência

$$\varphi_{A'}(x) = 1 - \varphi_A(x), \forall x \in U.$$



O produto cartesiano  $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$  é o subconjunto fuzzy de  $U_1 \times U_2 \times \dots \times U_n$ , cuja função de pertinência é dada por

$$\varphi_{A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \varphi_{A_1}(x_1) \wedge \varphi_{A_2}(x_2) \wedge \dots \wedge \varphi_{A_n}(x_n),$$

em que  $\wedge$  denota o operador mínimo.

Por exemplo, o produto cartesiano fuzzy  $A \times B$ , tem função de pertinência dada por  $\varphi_{A \times B} : U \times V \rightarrow [0, 1]$  em que

$$\varphi_{A \times B}(u, v) = \varphi_A(u) \wedge \varphi_B(v) = \min\{\varphi_A(u), \varphi_B(v)\}.$$

## Definição

Sejam os universos  $U_1, U_2, \dots, U_n$ . Uma relação fuzzy  $R$  é um subconjunto fuzzy de  $U_1 \times U_2 \times \dots \times U_n$ , cuja função de pertinência é dada por

$$\varphi_R : U_1 \times U_2 \times \dots \times U_n \rightarrow [0, 1].$$

O símbolo  $\varphi_R(x_1, x_2, \dots, x_n)$  representa a pertinência de  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  a  $R$  e pode ser interpretado como o grau com que  $x_1, x_2, \dots, x_n$  estão relacionados segundo a relação  $R$ .

Sejam  $U, V$  e  $W$  conjuntos universos,  $R$  uma relação fuzzy de  $U \times V$  e  $S$  outra relação de  $V \times W$ .

A relação  $T = R \circ S$  de  $U \times W$  é definida por

$$\varphi_{R \circ S}(u, w) = \sup_{v \in V} [\min\{\varphi_R(u, v), \varphi_S(v, w)\}].$$

## Definição (Regra de composição de inferência)

Sejam  $U$  e  $V$  dois conjuntos e  $\mathcal{R}$  uma relação fuzzy binária sobre  $U \times V$ . A relação  $\mathcal{R}$  define um funcional de  $\mathcal{F}(U)$  em  $\mathcal{F}(V)$  que, a cada elemento  $A \in \mathcal{F}(U)$ , faz corresponder o elemento  $B \in \mathcal{F}(V)$  cuja função de pertinência é dada por

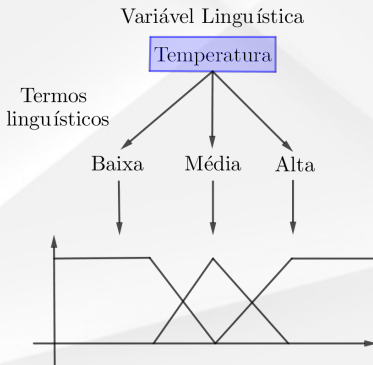
$$\varphi_B(y) = \varphi_{\mathcal{R}(A)}(y) = \sup_{x \in U} [\min\{\varphi_A(x), \varphi_{\mathcal{R}}(x, y)\}]. \quad (2)$$

Essa composição é conhecida como regra de composição de inferência.

# Composição de relações *fuzzy*

Uma **variável linguística** é uma variável cujo valor é:

- dado qualitativamente por termos linguísticos (que estabelece um adjetivo da variável);
- dado quantitativamente por uma função de pertinência (um conjunto fuzzy).



# Sistemas Baseado em Regras Fuzzy

Um Sistema Baseado em Regras Fuzzy (SBRF), especificamente controladores fuzzy, é caracterizado por quatro componentes essenciais:

1. módulo de entrada (*fuzzificação*);
2. módulo de base de regras;
3. módulo de inferência fuzzy;
4. módulo de saída (*defuzzificação*).

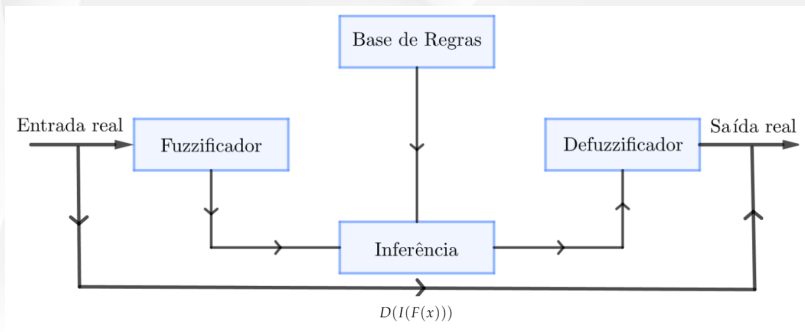


Figura: Diagrama de um SBRF. O símbolo  $D(I(F(x)))$  é uma notação funcional do SBRF.



- Módulo de fuzzificação: etapa em que as variáveis de entrada reais são “traduzidas” por conjuntos fuzzy;
- Regras fuzzy: são formadas por regras do tipo  
*“Se entrada, então saída”*.

As variáveis de *entrada* fazem parte do “domínio” e a *saída* do “contradomínio” do controlador.

Cada conjunto fuzzy dado nas entradas são chamados de **antecedentes**, enquanto os das saídas são chamados de **consequentes**.

Uma base de regras fuzzy é dada por um conjunto de regras  $R_i$  da seguinte forma

$$\left\{ \begin{array}{l} R_1 : \text{Se } x_1 \text{ é } A_{11} \text{ e } \dots \text{ e } x_n \text{ é } A_{1n}, \text{ então } u_1 \text{ é } B_{11} \text{ e } \dots \text{ e } u_m \text{ é } B_{1m}. \\ R_2 : \text{Se } x_1 \text{ é } A_{21} \text{ e } \dots \text{ e } x_n \text{ é } A_{2n}, \text{ então } u_1 \text{ é } B_{21} \text{ e } \dots \text{ e } u_m \text{ é } B_{2m}. \\ \quad \quad \quad \vdots \qquad \qquad \qquad \quad \quad \quad \vdots \qquad \qquad \qquad \quad \quad \quad \vdots \\ R_p : \text{Se } x_1 \text{ é } A_{p1} \text{ e } \dots \text{ e } x_n \text{ é } A_{pn}, \text{ então } u_1 \text{ é } B_{p1} \text{ e } \dots \text{ e } u_m \text{ é } B_{pm}. \end{array} \right. \quad (3)$$

em que

- $x_k$  é a  $k$ -ésima variável de entrada;
- $A_{ik}$  é o  $k$ -ésimo conjunto fuzzy “antecedente” da regra  $i$ ;
- $u_j$  é a  $j$ -ésima variável de saída;
- $B_{ij}$  é o  $j$ -ésimo conjunto fuzzy “consequente” do índice  $i$ , para  $i = 1, \dots, p$ ,  $k = 1, \dots, n$  e  $j = 1, \dots, m$ .

# Representação gráfica das regras fuzzy ( $A_i, B_i$ )

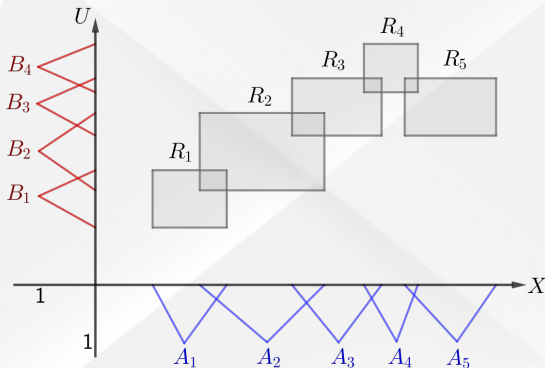


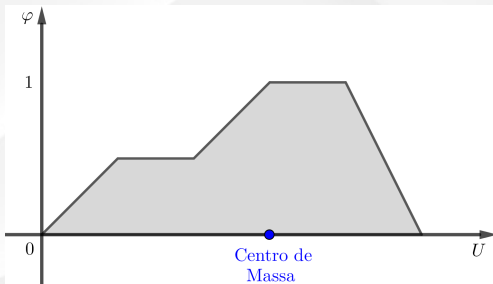
Figura: Representação gráfica das regras fuzzy ( $A_1, B_1$ ), ( $A_2, B_2$ ), ( $A_3, B_3$ ), ( $A_4, B_4$ ), e ( $A_5, B_3$ ). Os triângulos em azul representam os antecedentes, os triângulos vermelhos representam os conseqüentes e as regiões em cinza representam as regras.

# Sistemas Baseado em Regras Fuzzy

- Método de inferência fuzzy são os métodos que permitem manipular cada entrada de modo a obter uma saída;
- Defuzzificação: constitui em representar um conjunto fuzzy através de um número real. Aqui utilizaremos o centróide ou centro de massa (CM)

$$CM(B) = \frac{\sum_{i=1}^n u_i \varphi_B(u_i)}{\sum_{i=1}^n \varphi_B(u_i)} \quad \text{caso discreto e}$$

$$CM(B) = \frac{\int_{\mathbb{R}} u \varphi_B(u) du}{\int_{\mathbb{R}} \varphi_B(u) du} \quad \text{caso contínuo.}$$



A relação fuzzy de Mamdani  $M$ , definida em  $(X_1 \times \dots \times X_n) \times (U_1 \times \dots \times U_m)$ , é dada pela função de pertinência

$$\begin{aligned}\varphi_M(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) &= \varphi_{R_1}(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) \vee \\ &\quad \varphi_{R_2}(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) \vee \\ &\quad \vdots \\ &\quad \varphi_{R_p}(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m),\end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}\varphi_{R_i}(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) &= (\varphi_{A_{i1}}(x_1) \wedge \dots \wedge \varphi_{A_{in}}(x_n)) \wedge \\ &\quad (\varphi_{B_{i1}}(u_1) \wedge \dots \wedge \varphi_{B_{im}}(u_m))\end{aligned} \quad (4)$$

para todo  $i = 1, \dots, p$ .

Em outras palavras, a relação fuzzy  $M$  nada mais é que a união dos produtos cartesianos fuzzy entre os antecedentes e os consequentes de cada regra.

Para um subconjunto fuzzy de entrada

$$A_1 \times \dots \times A_n,$$

o conjunto fuzzy de saída

$$B_1 \times \dots \times B_m,$$

pele método de inferência de Mamdani, é dado por  $A \circ M = B$ , cuja função de pertinência é dada por

$$\varphi_B(\mathbf{u}) = (\varphi_{A \circ M})(\mathbf{u}) = \sup_x \{\varphi_A(\mathbf{x}) \wedge \varphi_M(\mathbf{x}, \mathbf{u})\}, \quad (5)$$

em que  $A = A_1 \times \dots \times A_n$  e  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ .

Dada a base de regras, com duas entradas e uma saída

$$\left\{ \begin{array}{l} R_1 : \text{Se } x \text{ é } A_{11} \text{ e } y \text{ é } A_{12}, \text{ então } u \text{ é } B_1 \\ R_2 : \text{Se } x \text{ é } A_{21} \text{ e } y \text{ é } A_{22}, \text{ então } u \text{ é } B_2 \end{array} \right. ,$$

As funções de pertinência de cada relação fuzzy  $R_i$  são dadas por

$$\begin{aligned} \varphi_{R_1}(x, y, u) &= (\varphi_{A_{11}}(x) \wedge \varphi_{A_{12}}(y)) \wedge \varphi_{B_1}(u) \\ \varphi_{R_2}(x, y, u) &= (\varphi_{A_{21}}(x) \wedge \varphi_{A_{22}}(y)) \wedge \varphi_{B_2}(u), \end{aligned} \quad (6)$$

de modo que a função de pertinência da relação  $M$  é

$$\varphi_M(x, y, u) = \varphi_{R_1}(x, y, u) \vee \varphi_{R_2}(x, y, u). \quad (7)$$

Assim, o conjunto fuzzy da saída final  $B$  tem função de pertinência dada por

$$\varphi_B(u) = \sup_{(x,y)} \{(\varphi_{A_1}(x) \wedge \varphi_{A_2}(y)) \wedge \varphi_M(x, y, u)\}. \quad (8)$$

# Exemplo: Entrada Fuzzy

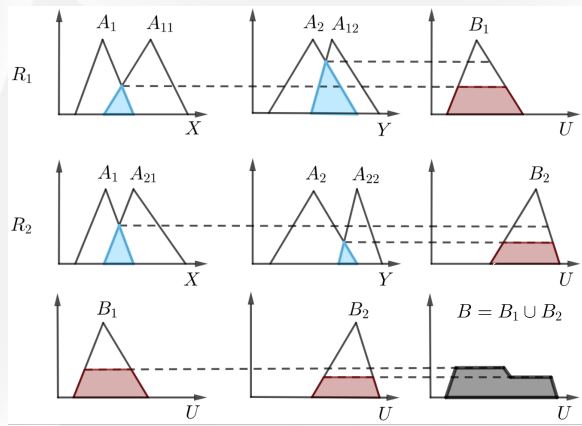


Figura: As duas primeiras linhas representam graficamente as regras  $R_1$  e  $R_2$  com saídas parciais  $B_1$  e  $B_2$  para entradas  $A_1$  e  $A_2$ . A terceira linha representa a saída  $B$  produzida via Mamdani.



Dada a base de regras

$$\begin{cases} R_1 : \text{Se } x \text{ é } A_{11} \text{ e } y \text{ é } A_{12}, \text{ então } u \text{ é } B_1 \\ R_2 : \text{Se } x \text{ é } A_{21} \text{ e } y \text{ é } A_{22}, \text{ então } u \text{ é } B_2 \end{cases} .$$

Para uma entrada  $(a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$  crisp, consideramos a função característica

$$\chi_{(a_1, a_2)}(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{se } (x, y) = (a_1, a_2) \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} .$$

e o sistema atua da seguinte forma

$$(a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2 \rightarrow B \xrightarrow{\text{defuz.}} \bar{u} \in \mathbb{R} .$$

# Exemplo: Entrada Crisp

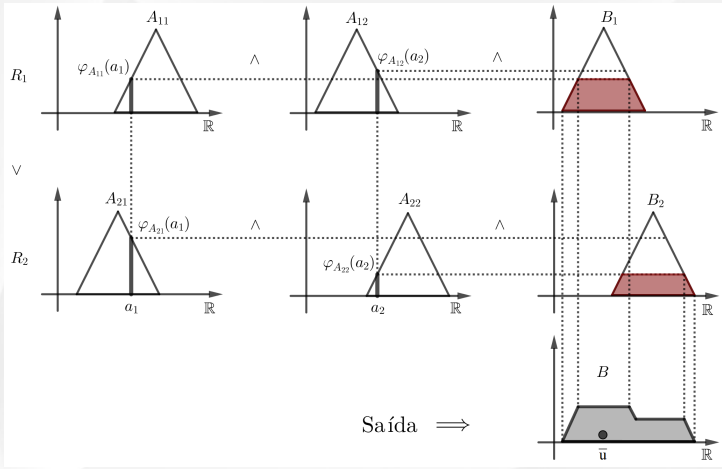


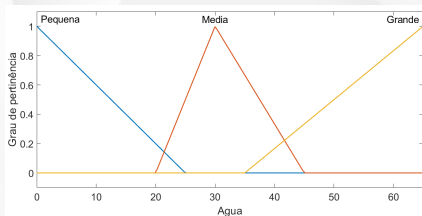
Figura: A região em cinza  $B$  representa a saída do sistema por Mamdani e  $\bar{u} \in \mathbb{R}$  representa o valor defuzzificado de  $B$ .

Para que uma violeta tenha longa vida são necessários pequenos cuidados diários. Por exemplo:

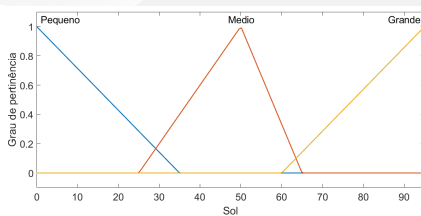
- Ser exposta de meia a uma hora ao Sol pela manhã ou pela tarde (pois a radiação UVB é menor nessas horas).
- Ser regada com aproximadamente 33 ml.

A partir da quantidade de água (ml) e de quantidade de exposição ao Sol (em minutos), modelaremos a *vitalidade das violetas*, via sistemas baseados em regras fuzzy.

- **Antecedentes:** *quantidade de água e tempo de exposição no Sol;*



(a) Antecedente quantidade de água (A)



(b) Antecedente exposição ao Sol (S)

Figura: Funções de pertinência dos antecedentes.

- **Consequentes:** *vitalidade das violetas.*

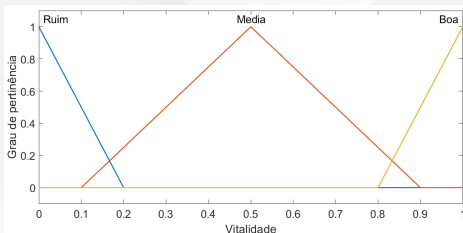


Figura: Consequente vitalidade das violetas (V)

## Aplicação Vitalidade das Violetas [2]

A base de regras proposta para essa modelagem, de acordo com um *especialista*, é dada na Tabela abaixo.

Sol(S)/Água (A)	pequena	média	grande
pequeno	média	boa	ruim
médio	média	boa	ruim
grande	ruim	média	ruim

Tabela: Base de regras para o problema de vitalidade das violetas

Com essa base de regras é possível monitorar a vitalidade da violeta a partir de cuidados.

Por exemplo, para  $a = 40$  ml e  $s = 60$  min, o SBRF fornece a saída  $v = 0,625$ .

Este é o valor da vitalidade, numa escala de 0 a 1, que pode ser interpretado como “**médio** (alto)” para a vitalidade da violeta.

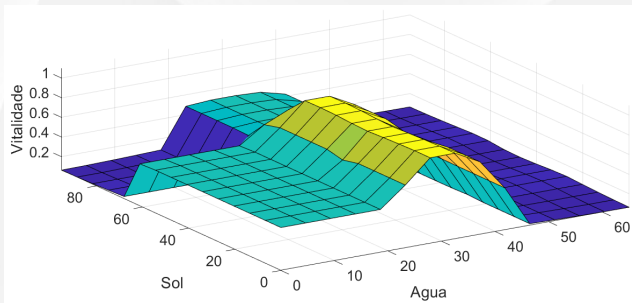


Figura: Superfície obtida através da saída do SBRF via Mamdani, para o exemplo de vitalidade da violeta.

Para traçar um paralelo do método de Mamdani com métodos clássicos a partir de um conjunto de dados (base de regras ou tabela) considere a base de regras

Se  $X$  então  $Y$

$$\begin{array}{l|l} A_1 = (0; \mathbf{1}; 2) & (1; \mathbf{2}; 3) = B_1 \\ A_2 = (1; \mathbf{2}; 4) & (2; \mathbf{3}; 4) = B_2 \\ A_3 = (3; \mathbf{4}; 5) & (0; \mathbf{1}; 2) = B_3 \end{array}$$

Supondo a entrada  $x = 1,5$ , temos como saída  $y=2,5$ .

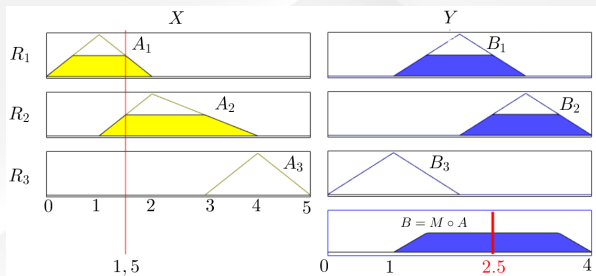


Figura: SBRF via método de Mamdani do item 1 a), para  $x = 1,5$ .



## Exemplo:

Supondo que os dados da tabela fossem precisos, o método do mínimos quadrados produz

$$f(x) = -\frac{1}{3} + 3x - \frac{2}{3}x^2.$$

A partir desta função  $f$ , temos que  $f(1,5) = 2,6667$ . Por outro lado, o SBRF produz como saída defuzzificada  $y = 2,5$ .

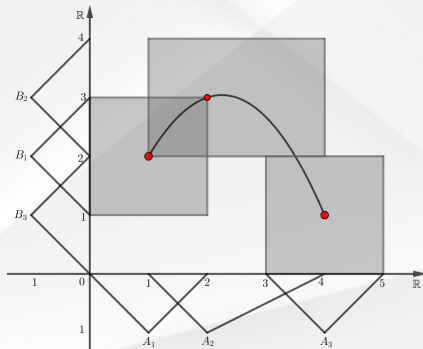
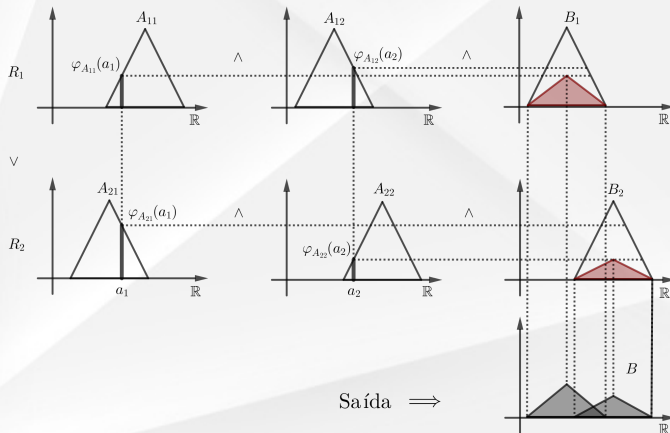


Figura: Representação gráfica da base de regras e da função  $f$ .

# Método de inferência fuzzy de Larsen

O método de inferência fuzzy de Larsen considera o operador produto no lugar do operador mínimo, como usado no método de Mamdani. Isto é,

$$\varphi_{R_i}(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) = (\varphi_{A_{i1}}(x_1) \wedge \dots \wedge \varphi_{A_{in}}(x_n)) \cdot (\varphi_{B_{i1}}(u_1) \wedge \dots \wedge \varphi_{B_{im}}(u_m))$$



# Aplicação Vitalidade das Violetas via método de Larsen

Tomando os mesmos valores de entrada (como no exemplo de Mamdani)  $a = 40$  ml e  $s = 60$  min, a saída obtida pelo método de inferência de Larsen é dada por  $v = 0,646$ , significando que a vitalidade pode ser interpretada como “**média (alta)**”.

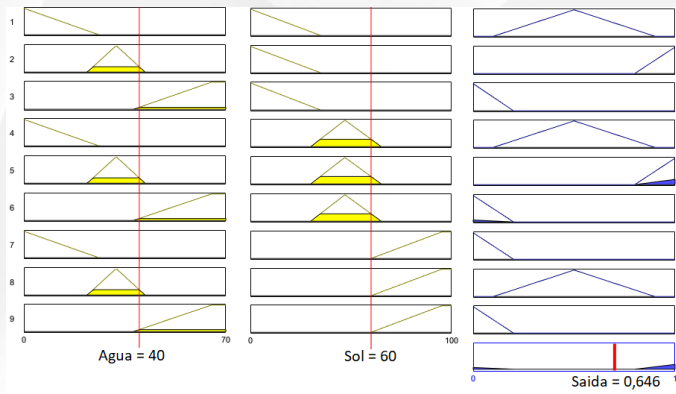


Figura: Método de Larsen para o problema de vitalidade das violetas, cuja saída é  $v = 0,646$ .



Considere o seguinte SBRF dado pelo método de Takagi-Sugeno.

$$\begin{cases} R_1 : \text{Se } x \text{ é } A_1, \text{ então } y_1 = x + 2 \\ R_2 : \text{Se } x \text{ é } A_2, \text{ então } y_2 = 2x \end{cases},$$

para todo  $x \in [0, 6]$ , cujas funções de pertinência dos conjuntos fuzzy  $A_1$  e  $A_2$  são dados respectivamente por

$$\varphi_{A_1}(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } 0 \leq x \leq 2 \\ 2 - \frac{1}{2}x, & \text{se } 2 < x \leq 4 \\ 0, & \text{se } x \geq 4 \end{cases},$$

e

$$\varphi_{A_2}(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \leq 2 \\ \frac{1}{2}x - 1, & \text{se } 2 \leq x \leq 4 \\ 1, & \text{se } 4 \leq x \leq 6 \end{cases}.$$

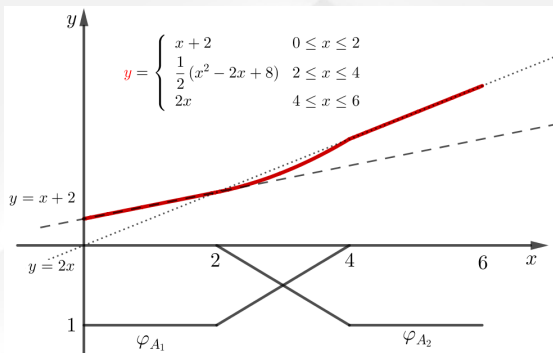
# Exemplo:

A saída via método de Takagi-Sugeno é dada por

$$y(x) = \varphi_{A_1}(x)(x + 2) + \varphi_{A_2}(x)(2x).$$

Portanto,

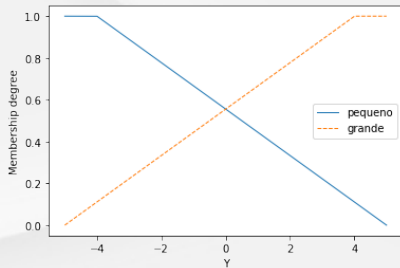
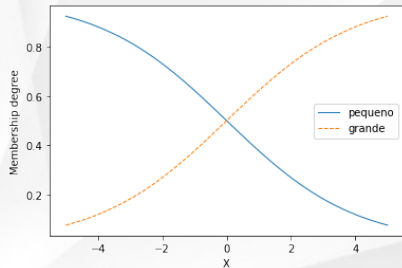
$$y(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{se } 0 \leq x \leq 2 \\ \frac{1}{2}(x^2 - 2x + 8) & \text{se } 2 < x \leq 4 \\ 2x & \text{se } 4 < x \leq 6 \end{cases} . \quad (10)$$



Considere a base de regras dada por:

$$\left\{ \begin{array}{l} R_1 : \text{Se } x \text{ é pequeno e } y \text{ é pequeno, então } z = -x + y - 1 \\ R_2 : \text{Se } x \text{ é pequeno e } y \text{ é grande, então } z = -0,7y + 4 \\ R_3 : \text{Se } x \text{ é grande e } y \text{ é pequeno, então } z = -0,5x + 2 \\ R_4 : \text{Se } x \text{ é grande e } y \text{ é grande, então } z = x + y + 3 \end{array} \right. ,$$

cujos antecedentes são representados na figura abaixo.



# Exemplo:

A saída desse SBRF é dada pela superfície abaixo

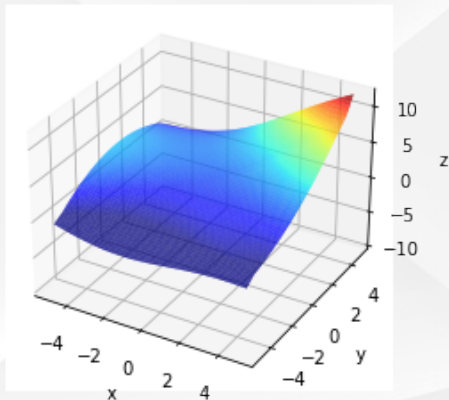


Figura: Superfície obtida através da saída do SBRF via Tagaki-Sugeno.



A denominação “sistemas p-fuzzy” significa sistemas parcialmente fuzzy.

Esse tipo de abordagem estuda problemas em que o campo de direções de uma equação diferencial é conhecido apenas qualitativamente.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R} \end{cases},$$

sendo  $f$  descrito por uma base de regras fuzzy, consistente com o modelo a ser estudado.

- Caso discreto:

$$(I) = \begin{cases} \text{clássico} \\ x_{k+1} = f(x_k) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \approx (II) = \begin{cases} \text{p-fuzzy} \\ \tilde{x}_{k+1} = D(I(F(\tilde{x}_k))) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

Neste caso o controlador fuzzy “produz” uma “função”  $F(\cdot)$  a partir de propriedades conhecidas. Assim, as soluções que investigaremos ( $\tilde{x}_{k+1}$ ) devem ter propriedade de  $\tilde{x}_k \approx x_k$ .

- Caso contínuo:

Como no caso discreto, a solução que interessa é a do sistema (II), e a solução  $\tilde{x}_n$  é dada por algum método numérico para EDOs, como por exemplo o de Euler

$$\tilde{x}_{n+1} = \tilde{x}_n + hD(I(F(\tilde{x}_n))),$$

onde  $h$  é o passo.

Em dinâmica de populações é aceito o princípio:

*“Em cada instante  $t$ , a taxa de variação de uma população é diretamente proporcional ao tamanho da população”*

Malthus modelou essa lei pelo PVI

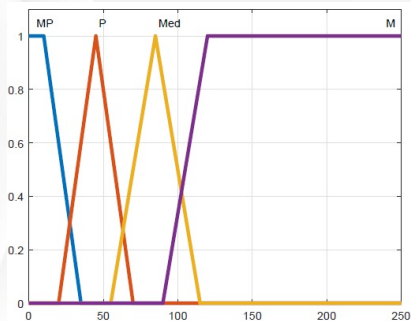
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \lambda x \\ x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R} \end{cases}, \quad (11)$$

cuja solução é  $x(t) = x_0 e^{\lambda t}$ .

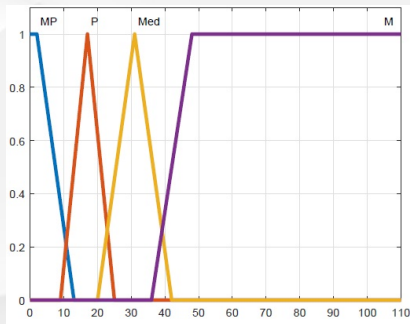
Agora a partir da lei é possível escrever a base de regras, considerando  $t$  como entrada e variação  $\frac{dx}{dt}$  como saída.

# Modelo de Malthus

- $R_1$  : Se a população  $x$  for  **muito pouca**, então a variação  $\frac{dx}{dt}$  é  **muito pouca**.  
 $R_2$  : Se a população  $x$  for  **pouca**, então a variação  $\frac{dx}{dt}$  é  **pouca**.  
 $R_3$  : Se a população  $x$  for  **média**, então a variação  $\frac{dx}{dt}$  é  **média**.  
 $R_4$  : Se a população  $x$  for  **muita**, então a variação  $\frac{dx}{dt}$  é  **muita**.



(a) Conjuntos fuzzy para o antecedente população  $x(t)$ .



(b) Conjuntos fuzzy para o consequente taxa de variação  $\frac{dx}{dt}$ .

A solução  $x(t)$  do modelo p-fuzzy é dada através do método clássico de Euler:

$$x_{n+1} = x_n + hSBRF_f(x_n),$$

em que  $SBRF_f(x_n)$  representa a saída do SBRF, produzido pelo controlador fuzzy.

Por exemplo, se  $h = 0,1$  e  $x_0 = 2$ , temos que  $SBRF_f(x_0) \approx 4,1062$  e assim

$$x_1 = x_0 + h \cdot SBRF_f(x_0) = 2 + 0,1 \cdot 4,1062 \approx 2,4106,$$

e o processo de iteração continua de modo similar para  $x_2, x_3, \dots, x_n$ .

Com isso, a partir da base de regras dada anteriormente, obtém-se a seguinte solução dada na figura abaixo.

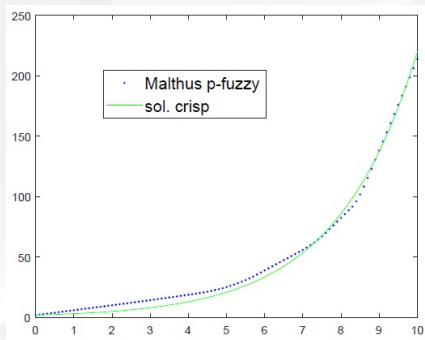


Figura: Soluções do modelo de Malthus via sistema p-fuzzy (linha pontilhada em azul) e via EDO (linha em verde). Os parâmetros utilizados foram  $h = 0,1$ ,  $x_0 = 2$  e  $\lambda = 0,47$ .

- [1] L. C. Barros and R. C. Bassanezi (2021)  
**Tópicos de lógica fuzzy e biomatemática.**  
*Grupo de Biomatemática, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica (IMECC), Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP).*
- [2] L.C. Barros, R.C. Bassanezi and W.A. Lodwick (2017)  
**A First Course in Fuzzy Logic, Fuzzy Dynamical Systems, and Biomathematics.**  
*Springer-Verlag Berlin Heidelberg.*
- [3] W. Pedrycz and F. Gomide (2007)  
**Fuzzy Systems Engineering: Toward Human-Centric Computing.**  
*John Wiley & Sons, New Jersey.*
- [4] G. J. Klir and B. Yuan (1995)  
**Fuzzy Sets and Fuzzy Logic: Theory and Applications.**  
*Prentice-Hall, Inc., Upper Saddle River, NJ, USA.*
- [5] R. S. M. Jafelice and L. C. Barros and R. C. Bassanezi (2012)  
**Usando a Teoria dos Conjuntos Fuzzy na Modelagem de Fenômenos Biológicos**  
*Congresso Brasileiro de Sistemas Fuzzy.*

O primeiro modelo matemático populacional que se conhece é o de Malthus, visto anteriormente.

Esse é um modelo que não pressupõe algum tipo de limitação (por espaço, alimentos, recursos em geral) e isso faz com que a população cresça exponencialmente.

Vimos esse comportamento tanto a partir da solução do PVI (11), como a partir da metodologia p-fuzzy.

A seguir apresentamos o modelo populacional com limitação de recursos.



O modelo de Verhulst tem como hipótese que, devido à limitação de recursos, há competição entre os indivíduos.

- Caso discreto:

O modelo populacional discreto de Verhulst é descrito pela equação de diferenças logística

$$x_{n+1} = \lambda x_n (1 - x_n), \quad (12)$$

em que a variável  $x_n$  é a densidade populacional da  $n$ -ésima geração.

O único estado estacionário da Equação (12) é dada por

$$\bar{x} = 1 - \frac{1}{\lambda}, \quad (13)$$

que é assintoticamente estável se  $1 < \lambda < 3$ . Para  $\lambda > 3$ , o modelo logístico discreto apresenta uma sequência de bifurcações, levando a uma dinâmica complexa.

- i) Se  $\lambda \in (1, 2)$ , então o estado estacionário em (13) é um atrator global e a sequência dada por (12) converge monotonicamente para  $\bar{x}$ .
- ii) Se  $\lambda \in (2, 3)$ , então o estado estacionário em (13) é um atrator global e a sequência (12) converge para  $\bar{x}$ , mas não monotonicamente.
- iii) Se  $\lambda \in (3, 1 + \sqrt{6})$ , então o estado é oscilatório de período 2, isto é, a sequência (12) assume apenas dois valores fixos que se alternam, digamos  $\bar{x}_1$  e  $\bar{x}_2$ , dados pelas raízes

$$\bar{x}_1 = \frac{(\lambda + 1) + \sqrt{(\lambda - 3)(\lambda + 1)}}{2\lambda}$$

e

$$\bar{x}_2 = \frac{(\lambda + 1) - \sqrt{(\lambda - 3)(\lambda + 1)}}{2\lambda}.$$

Nesse caso, o ponto fixo  $\bar{x}$  é instável.

- Análise de (12) via p-fuzzy:

Aqui adotamos um sistema baseado em regras fuzzy e a solução é dada por

$$x_{n+1} = FRBS_f(x_n), \quad x(0) = x_0 \in \mathbb{R}, \quad (14)$$

A solução do sistema (14) é obtida por

$$x_{n+1} = x_n + \Delta x_n, \quad (15)$$

sendo que a variação da função  $\Delta x_n$  é a saída do controlador fuzzy na  $k$ -ésima iteração.

Considerando  $X$  como a variável de entrada e  $\Delta X$  a de saída, temos a base de regras típica para modelo logístico.

$r_1$  : Se  $X$  é “baixa” ( $A_1$ ), então a variação ( $\Delta X$ ) é “baixa positiva” ( $B_2$ ).

$r_2$  : Se  $X$  é “média baixa” ( $A_2$ ), então a variação ( $\Delta X$ ) é “média positiva” ( $B_3$ ).

$r_3$  : Se  $X$  é “média” ( $A_3$ ), então a variação ( $\Delta X$ ) é “alta positiva” ( $B_4$ ).

$r_4$  : Se  $X$  é “média alta” ( $A_4$ ) então a variação ( $\Delta X$ ) é “média positiva” ( $B_3$ ).

$r_5$  : Se  $X$  é “alta” ( $A_5$ ) então a variação ( $\Delta X$ ) é “baixa positiva” ( $B_2$ ).

$r_6$  : Se  $X$  é “muito alta” ( $A_6$ ) então a variação ( $\Delta X$ ) é “baixa negativa” ( $B_1$ ).

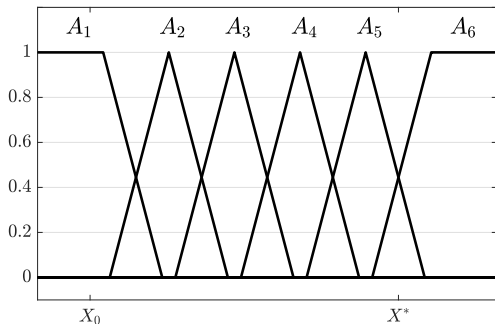


Figura: Antecedentes da população  $X$  para o modelo logístico, em que  $X_0$  representa a população inicial e  $X^*$  a capacidade suporte do meio.

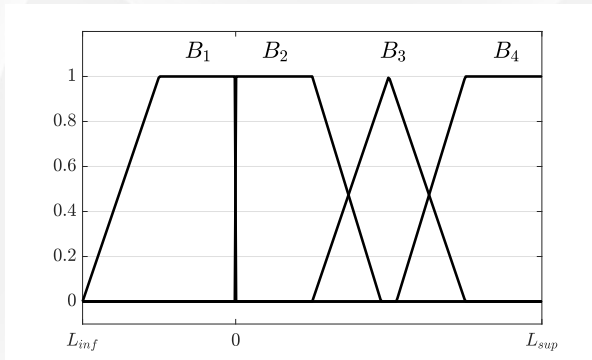


Figura: Consequentes da variação  $\Delta X$  para o modelo logístico, em que  $[L_{inf}, L_{sup}]$  representa o intervalo de valores possível para  $\Delta X$ .

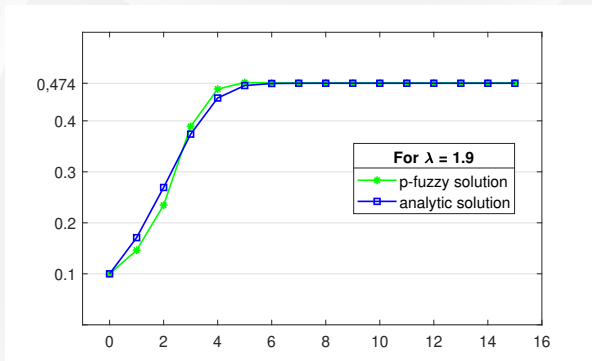


Figura: Solução discreta obtida pelo sistema p-fuzzy (15) e solução analítica do modelo logístico (12), para  $\lambda = 1,9$  e  $\bar{x} \approx 0,474$ .

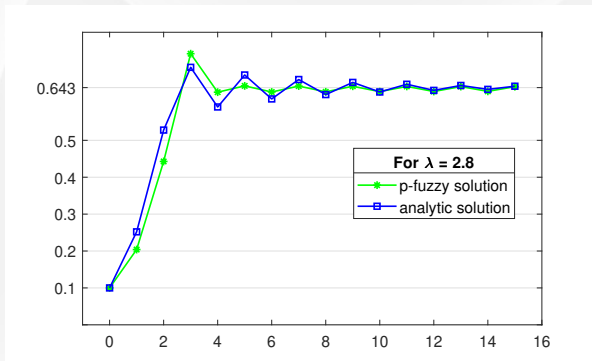


Figura: Solução discreta obtida pelo sistema p-fuzzy (15) e solução analítica do modelo logístico (12), para  $\lambda = 2, 8$  e  $\bar{x} \approx 0, 643$ .



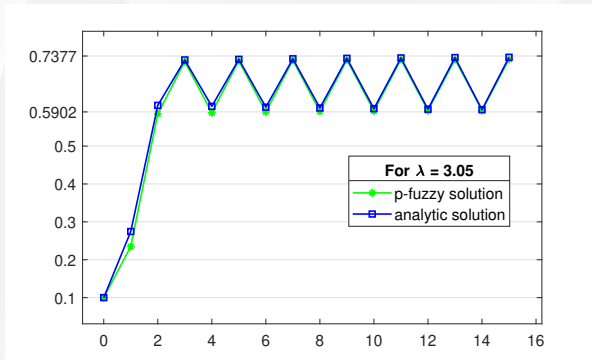


Figura: Solução discreta obtida pelo sistema p-fuzzy (15) e solução analítica do modelo logístico (12), para  $\lambda = 3,05$ ,  $\bar{x}_1 \approx 0,5902$  e  $\bar{x}_2 \approx 0,7377$ .

No primeiro caso podemos observar a convergência monôtona e assintótica da solução para  $\bar{x} = 1 - \frac{1}{1,9} \approx 0,474$ .

O segundo caso ilustra a convergência da solução para  $\bar{x} = 1 - \frac{1}{2,8} \approx 0,643$ , que se dá de forma oscilatória.

O terceiro caso apresenta a dinâmica de bifurcação, com oscilação de período 2 assumindo os valores  $\bar{x}_1 \approx 0,5902$  e  $\bar{x}_2 \approx 0,7377$ .

Cada um dos casos temos que o sistema p-fuzzy capta o comportamento dinâmico do caso clássico.

- Caso contínuo:

O modelo tradicional de Verhulst para crescimento populacional é regido pelo seguinte PVI

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax \left(1 - \frac{x}{K}\right) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \iff \begin{cases} \frac{1}{x} \frac{dx}{dt} = a \left(1 - \frac{x}{K}\right) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}, \quad (16)$$

onde  $a$  é a razão de crescimento intrínseca e  $K$  é a capacidade suporte.

As soluções clássicas de (16), que representam as populações  $x(t)$  em cada instante  $t$ , são dadas por

$$x(t) = \frac{K}{\left(\frac{K}{x_0} - 1\right)e^{-at} + 1}. \quad (17)$$

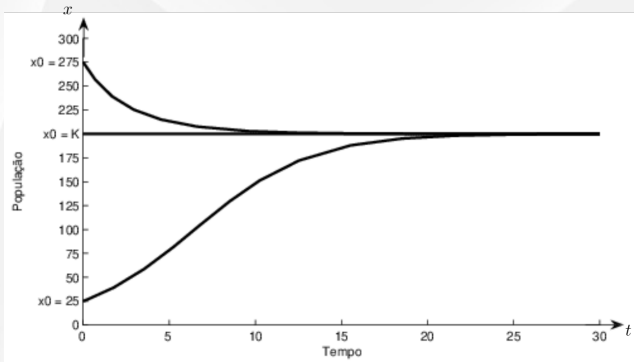


Figura: Trajetórias do modelo contínuo de Verhulst com capacidade suporte  $K = 200$  e condições iniciais  $x_0 = 25$ ,  $x_0 = 200$  e  $x_0 = 270$ .

- Solução via p-fuzzy:

Para traçarmos um paralelo nas formulações das regras fuzzy com o modelo clássico, analisaremos

$$\frac{1}{x} \frac{dx}{dt} = a \left(1 - \frac{x}{k}\right) = f(x), \quad (18)$$

em que  $f$  é afim.

Note que a Equação (18) está escrita em função da taxa de crescimento específico. Esta formulação facilita a elaboração das regras do sistema p-fuzzy.

Denotaremos  $X$  para a população (entrada) e  $\frac{1}{X} \frac{dX}{dt}$  (saída) para a taxa de crescimento relativa por unidade de tempo (ou taxa de crescimento específico).

De acordo com a Equação (18), temos que as regras para a variação específica devem “decrecer” com  $x$ .

$R_1$	:	<b>Se</b>	( $X$ )	é	“muito baixa”	( $A_1$ )	<b>então</b>	a	$\frac{1}{X} \frac{dX}{dt}$	é	“alta positiva”	( $B_1$ )
$R_2$	:	<b>Se</b>	( $X$ )	é	“baixa”	( $A_2$ )	<b>então</b>	a	$\frac{1}{X} \frac{dX}{dt}$	é	“alta positiva”	( $B_2 = B_1$ )
$R_3$	:	<b>Se</b>	( $X$ )	é	“média”	( $A_3$ )	<b>então</b>	a	$\frac{1}{X} \frac{dX}{dt}$	é	“média positiva”	( $B_3$ )
$R_4$	:	<b>Se</b>	( $X$ )	é	“média alta”	( $A_4$ )	<b>então</b>	a	$\frac{1}{X} \frac{dX}{dt}$	é	“média positiva”	( $B_4 = B_3$ )
$R_5$	:	<b>Se</b>	( $X$ )	é	“alta”	( $A_5$ )	<b>então</b>	a	$\frac{1}{X} \frac{dX}{dt}$	é	“baixa positiva”	( $B_5$ )
$R_6$	:	<b>Se</b>	( $X$ )	é	“altíssima”	( $A_6$ )	<b>então</b>	a	$\frac{1}{X} \frac{dX}{dt}$	é	“baixa negativa”	( $B_6$ )

Tabela: Regras para o modelo fuzzy (18).

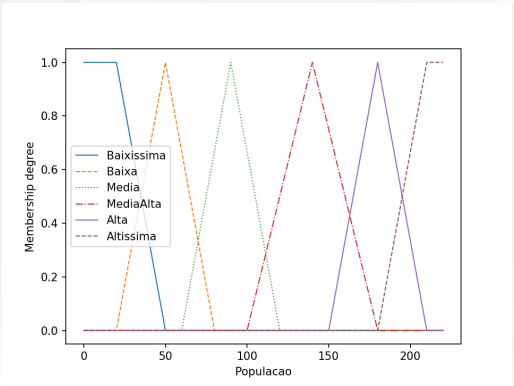


Figura: Funções de pertinência da população X.

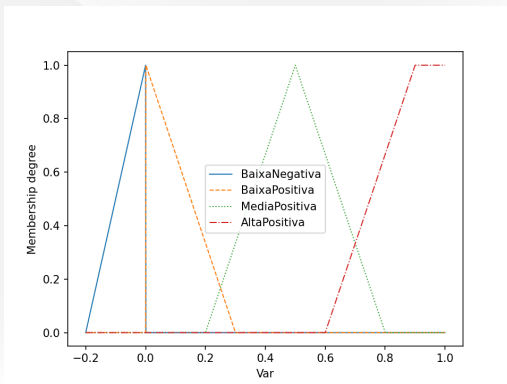


Figura: Funções de pertinência da variação específica  $\frac{1}{X} \frac{dX}{dt}$ .



Para efeito de ilustração optamos pelo método numérico de Euler para obter a solução via p-fuzzy (para a função  $SBRF_f(x_n)$ ) e chegamos:

$$x_{n+1} = x_n + hx_n SBRF_f(x_n),$$

cuja representação gráfica pode ser vista na figura abaixo com passo  $h = 0,001$ .

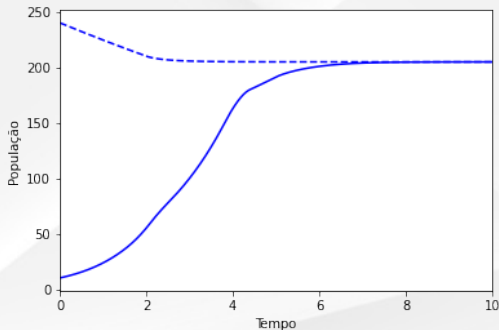


Figura: Trajetória do modelo p-fuzzy contínuo referente a Tabela 2. Curva contínua com  $x_0 = 10$  e curva tracejada com  $x_0 = 240$ .

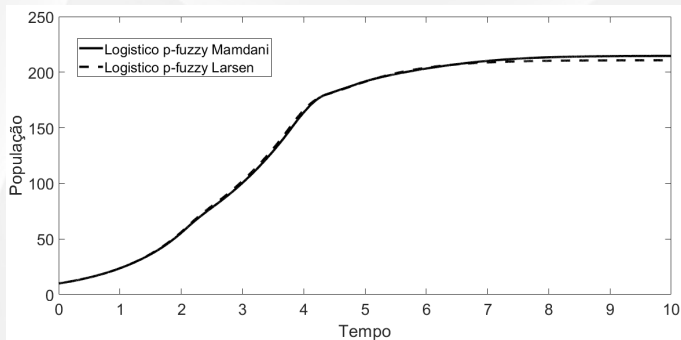


Figura: Trajetória do modelo p-fuzzy contínuo com  $x_0 = 10$  através do método de inferência fuzzy de Larsen (linha tracejada) e Mamdani (linha contínua).

Para o controlador do tipo Takagi-Sugeno, a metodologia p-fuzzy pode se tornar redundante já que neste caso o PVI clássico é equivalente ao p-fuzzy, isto é,

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = SBRF(x) \\ x(t_0) = x_0 \end{array} \right. \equiv \left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = f(x) \\ x(t_0) = x_0 \end{array} \right. ,$$

Considere a seguinte base de regras:

$$\left\{ \begin{array}{l} R_1 : \text{Se } x \text{ é pequeno } (A_1), \text{ então } f_1 = \frac{x}{2} \\ R_2 : \text{Se } x \text{ é grande } (A_2), \text{ então } f_2 = \frac{1-x}{2} \end{array} \right. ,$$

onde

$$\varphi_{A_1}(x) = \begin{cases} 1-x, & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad \text{e} \quad \varphi_{A_2}(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} .$$

# Modelo de Verhulst via Tagaki-Sugeno

A variação  $\frac{dx}{dt} = f(x)$  obtida pelo sistema de inferência Takagi-Sugeno é dada por

$$f(x) = \frac{\varphi_{A_1}(x)\left(\frac{x}{2}\right) + \varphi_{A_2}(x)\left(\frac{1-x}{2}\right)}{\varphi_{A_1}(x) + \varphi_{A_2}(x)} = x(1-x).$$

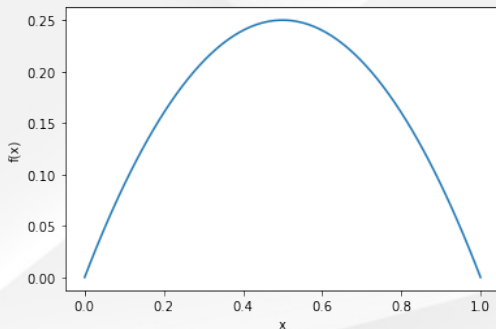


Figura: Função (68) obtida pelo método de inferência Takagi-Sugeno.

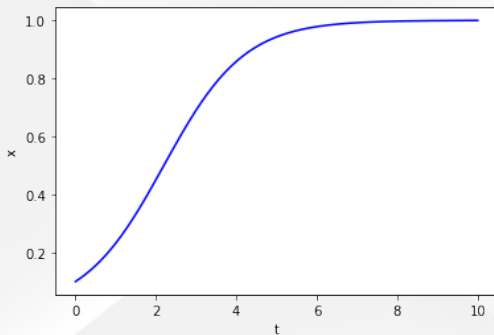


Figura: Solução do modelo de Verhulst via p-fuzzy com o método de inferência de Takagi-Sugeno.

A mesma técnica utilizada no caso unidimensional pode ser estendida para o caso  $n$ -dimensional. Por exemplo, considerando um PVI bidimensional dado por

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = SBRF_f(x, y), \\ \frac{dy}{dt} = SBRF_g(x, y), \\ x(a) = x_0 \in \mathbb{R}, \\ y(a) = y_0 \in \mathbb{R}. \end{array} \right. \quad (19)$$

o método de Euler pode ser novamente utilizado, considerando como saída as **taxas específicas de variação**, obtendo as estimativas da seguinte forma:

$$x_{n+1} = x_n + h \cdot SBRF_f(x_n, y_n),$$

$$y_{n+1} = y_n + h \cdot SBRF_g(x_n, y_n),$$

onde  $h$  é o passo e  $SBRF_f, SBRF_g$  são as aplicações (saídas) produzidas pelo controlador fuzzy.

O modelo presa-predador clássico de Lotka-Volterra pressupõe que:

1. Tanto as presas como os predadores estão distribuídos uniformemente num mesmo habitat, ou seja, todos os predadores têm a mesma chance de encontrar cada presa;
2. O encontro entre os elementos das duas espécies seja ao acaso, a uma taxa proporcional ao tamanho das duas populações, já que quanto maior o número de presas, mais fácil será encontrá-las e quanto mais predadores, maior o número de ataques;
3. A população de presas cresce exponencialmente na ausência de predadores (crescimento ilimitado por escassez de predadores);
4. A população de predadores decresce exponencialmente na ausência de presas (decrécimo por escassez de alimento);
5. A população de predadores é favorecida pela abundância de presas;
6. A população de presas é desfavorecida pelo aumento de predadores.

# Modelo presa-predador de Lotka-Volterra

Estas seis hipóteses são resumidas nas equações abaixo, denominadas Modelo de Lotka-Volterra:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax - \alpha xy \\ \frac{dy}{dt} = -by + \beta xy \\ x(0) = x_0 \in \mathbb{R} \\ y(0) = y_0 \in \mathbb{R} \end{cases} . \quad (20)$$

As variáveis de estado  $x$  e  $y$  são, respectivamente, quantidade de presas e quantidade de predadores em cada instante  $t$ .

Os parâmetros representam:

- $a$  : taxa de crescimento da população de presas na ausência de predadores;
- $\frac{\alpha}{\beta}$  : a eficiência de predação;
- $b$  : taxa de mortalidade de predadores na ausência de presas;
- $x_0$  e  $y_0$  : populações iniciais.



# Solução clássica para o modelo presa-predador

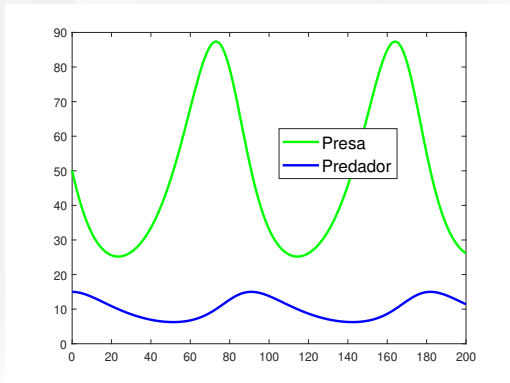


Figura: Modelo presa-predador com  $a = 0,1$ ,  $\alpha = 0,01$ ,  $b = 0,05$ ,  $\beta = 0,001$ ,  $x_0 = 50$  e  $y_0 = 15$ .

# Solução clássica para o modelo presa-predador

Os pontos críticos do sistema (20) são:  $(0, 0)$ , um ponto de sela instável, e  $\left(\frac{b}{\beta}, \frac{a}{\alpha}\right)$  que é um centro estável.

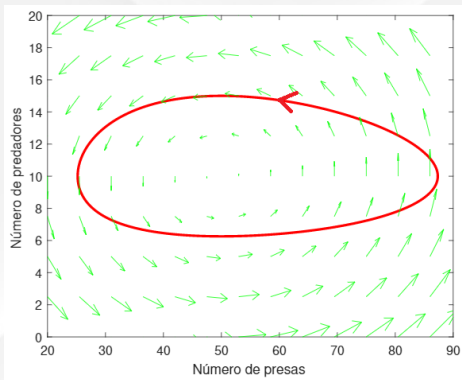


Figura: Plano de fase do modelo de Lotka-Volterra (20).

Por meio de um sistema p-fuzzy bidimensional contínuo, reproduzimos um plano de fase semelhante ao do modelo contínuo de Lotka-Volterra. Para isto é necessário reinterpretarmos as seis hipóteses comentadas anteriormente:

1. dentro de cada espécie, o ambiente não privilegia nenhum indivíduo. Portanto é natural que as variáveis de estado sejam apenas quantidades;
2. há interação entre as espécies;
3. não há autoinibição nas presas, isto é, para um dado número de predadores, o crescimento específico das presas é constante, podendo ser positivo ou negativo;
4. como em "3.", para um dado número de presas, o crescimento específico dos predadores seja constante, podendo ser positivo ou negativo;
5. o crescimento específico dos predadores aumenta com o número de presas;
6. o crescimento específico das presas diminui com o aumento dos predadores.

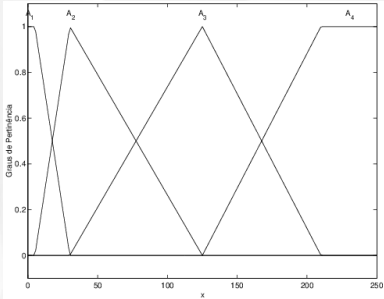
Resumidamente, as hipóteses de "3" a "6" indicam que, a interação é típica de presa-predador e que, mantendo-se uma espécie constante, a outra tem crescimento (decrecimento) malthusiano, isto é, tem crescimento específico constante.

Como no caso unidimensional, temos duas variáveis linguísticas de entrada e duas variáveis de saída:

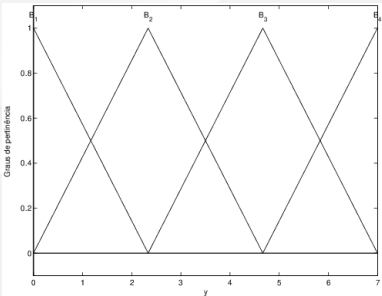
- quantidade de presas ( $X$ ) e quantidade de predadores ( $Y$ );
- variação relativa da quantidade de presas por unidade de tempo  $\left(\frac{1}{X} \frac{dX}{dt}\right)$  e variação relativa da quantidade de predadores por unidade de tempo  $\left(\frac{1}{Y} \frac{dY}{dt}\right)$ .

Os valores assumidos pela variável  $X$  são: *baixa* ( $A_1$ ), *média baixa* ( $A_2$ ), *média alta* ( $A_3$ ) e *alta* ( $A_4$ ) e pela variável  $Y$  são *baixa* ( $B_1$ ), *média baixa* ( $B_2$ ), *média alta* ( $B_3$ ) e *alta* ( $B_4$ ).

Ambos os crescimentos específicos,  $\frac{1}{X} \frac{dX}{dt}$  e  $\frac{1}{Y} \frac{dY}{dt}$ , assumirão os valores *alto positivo* ( $P_2$ ), *baixo positivo* ( $P_1$ ), *baixo negativo* ( $N_1$ ) e *alto negativo* ( $N_2$ ).

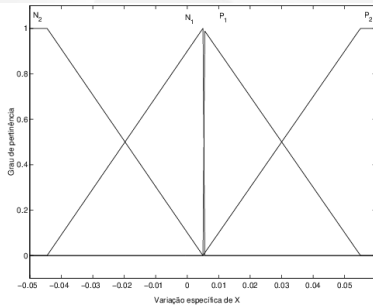


(a) Presas (X)

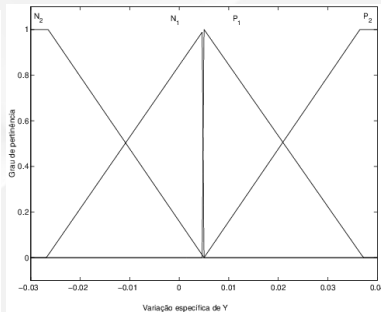


(b) Predadores (Y)

Figura: Funções de pertinência dos antecedentes.



(a) Variações das presas  $\left(\frac{1}{X} \frac{dX}{dt}\right)$



(b) Variações dos predadores  $\left(\frac{1}{Y} \frac{dY}{dt}\right)$

Figura: Funções de pertinência dos consequentes.

A partir das seis reinterpretações para as hipótese de Lotka-Volterra feitas acima propomos a seguinte base de regras fuzzy.

Se  $X$  é  $A_1$  e  $Y$  é  $B_1$  então  $\frac{1}{X} \frac{dX}{dt}$  é  $P_2$  e  $\frac{1}{Y} \frac{dY}{dt}$  é  $N_2$

Se  $X$  é  $A_2$  e  $Y$  é  $B_1$  então  $\frac{1}{X} \frac{dX}{dt}$  é  $P_2$  e  $\frac{1}{Y} \frac{dY}{dt}$  é  $N_1$

Se  $X$  é  $A_3$  e  $Y$  é  $B_1$  então  $\frac{1}{X} \frac{dX}{dt}$  é  $P_2$  e  $\frac{1}{Y} \frac{dY}{dt}$  é  $P_1$

Se  $X$  é  $A_4$  e  $Y$  é  $B_1$  então  $\frac{1}{X} \frac{dX}{dt}$  é  $P_2$  e  $\frac{1}{Y} \frac{dY}{dt}$  é  $P_2$

Se  $X$  é  $A_1$  e  $Y$  é  $B_2$  então  $\frac{1}{X} \frac{dX}{dt}$  é  $P_1$  e  $\frac{1}{Y} \frac{dY}{dt}$  é  $N_2$

Se  $X$  é  $A_2$  e  $Y$  é  $B_2$  então  $\frac{1}{X} \frac{dX}{dt}$  é  $P_1$  e  $\frac{1}{Y} \frac{dY}{dt}$  é  $N_1$

Se  $X$  é  $A_3$  e  $Y$  é  $B_2$  então  $\frac{1}{X} \frac{dX}{dt}$  é  $P_1$  e  $\frac{1}{Y} \frac{dY}{dt}$  é  $P_1$

Se  $X$  é  $A_4$  e  $Y$  é  $B_2$  então  $\frac{1}{X} \frac{dX}{dt}$  é  $P_1$  e  $\frac{1}{Y} \frac{dY}{dt}$  é  $P_2$

Se  $X$  é  $A_1$  e  $Y$  é  $B_3$  então  $\frac{1}{X} \frac{dX}{dt}$  é  $N_1$  e  $\frac{1}{Y} \frac{dY}{dt}$  é  $N_2$

Se  $X$  é  $A_2$  e  $Y$  é  $B_3$  então  $\frac{1}{X} \frac{dX}{dt}$  é  $N_1$  e  $\frac{1}{Y} \frac{dY}{dt}$  é  $N_1$

Se  $X$  é  $A_3$  e  $Y$  é  $B_3$  então  $\frac{1}{X} \frac{dX}{dt}$  é  $N_1$  e  $\frac{1}{Y} \frac{dY}{dt}$  é  $P_1$

Se  $X$  é  $A_4$  e  $Y$  é  $B_3$  então  $\frac{1}{X} \frac{dX}{dt}$  é  $N_1$  e  $\frac{1}{Y} \frac{dY}{dt}$  é  $P_2$

Se  $X$  é  $A_1$  e  $Y$  é  $B_4$  então  $\frac{1}{X} \frac{dX}{dt}$  é  $N_2$  e  $\frac{1}{Y} \frac{dY}{dt}$  é  $N_2$

Se  $X$  é  $A_2$  e  $Y$  é  $B_4$  então  $\frac{1}{X} \frac{dX}{dt}$  é  $N_2$  e  $\frac{1}{Y} \frac{dY}{dt}$  é  $N_1$

Se  $X$  é  $A_3$  e  $Y$  é  $B_4$  então  $\frac{1}{X} \frac{dX}{dt}$  é  $N_2$  e  $\frac{1}{Y} \frac{dY}{dt}$  é  $P_1$

Se  $X$  é  $A_4$  e  $Y$  é  $B_4$  então  $\frac{1}{X} \frac{dX}{dt}$  é  $N_2$  e  $\frac{1}{Y} \frac{dY}{dt}$  é  $P_2$

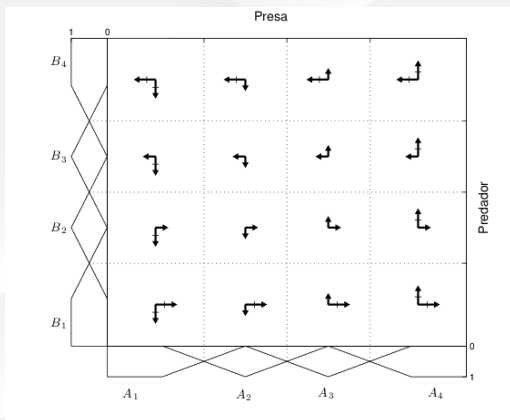


# Modelo presa-predador via p-fuzzy

De forma semelhante às regras para o modelo de Verhulst, aqui também valem

*“dado o valor de uma variável, a taxa específica da outra é constante.”*

A figura abaixo é apresentada para traçarmos um paralelo com a representação do campo de direções de equações diferenciais clássicas.



Utilizando o Método de Inferência de Mamdani e a defuzzificação do Centro de Gravidade obtemos os valores  $\frac{1}{x} \frac{dx}{dt}$  e  $\frac{1}{y} \frac{dy}{dt}$ .

Como as saídas são  $\frac{1}{x} \frac{dx}{dt}$  e  $\frac{1}{y} \frac{dy}{dt}$ , devemos multiplicá-las pelas entradas  $x$  e  $y$ , respectivamente, para obter  $\frac{dx}{dt}$  e  $\frac{dy}{dt}$ .

Assim, em cada instante  $t$ , o número de presas e de predadores são estimados por algum método numérico, como o de Euler, na seguinte forma:

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + h x_n SBRF_f(x_n, y_n) \\ y_{n+1} = y_n + h y_n SBRF_g(x_n, y_n) \end{cases} \quad (21)$$

As simulações das trajetórias produzidas pelo sistema p-fuzzy seguem os passos:

- Para começar o processo, adotamos os valores  $x_0 = 100$ ,  $y_0 = 3$ ,  $h = 0,1$  e  $t_0 = 0$ .
- Dados iniciais para o controlador fuzzy: a população de presas  $x_0$  e a de predadores  $y_0$ ;
- As saídas fornecidas pelo controlador fuzzy, multiplicadas pelas entradas, fornecem os valores:  $x_0 SBRF_f(x_0, y_0)$  e  $y_0 SBRF_g(x_0, y_0)$ ;
- Por (21), encontramos  $x_1$  e  $y_1$ ;
- $x_1$  e  $y_1$  são os novos valores de entrada do controlador e assim sucessivamente.

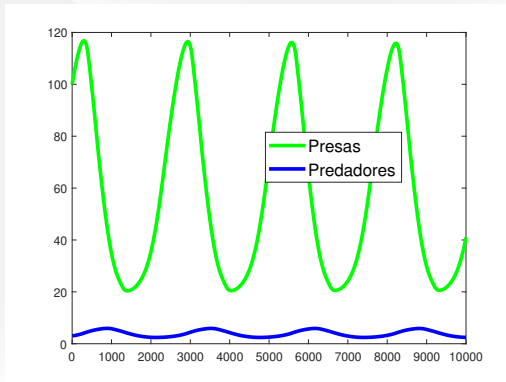


Figura: Solução para o modelo de presa-predador via p-fuzzy, cujos parâmetros são  $x_0 = 100$ ,  $y_0 = 3$ ,  $h = 0,1$  e  $t_0 = 0$ .

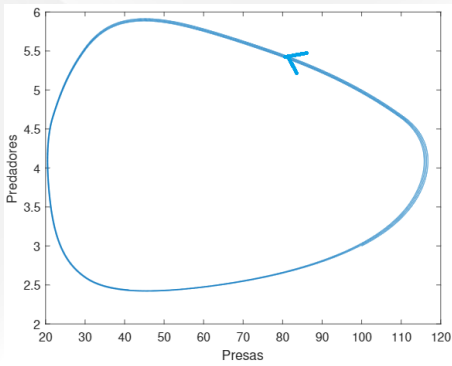


Figura: Plano de fase do sistema p-fuzzy para  $x_0 = 100$  e  $y_0 = 3$ .

- Com os dados iniciais adotados e o sistema p-fuzzy dado pela base de regras sugerida, combinadas com o sistema (21), é possível concluir que o ponto de equilíbrio é  $P_e = (77, 5; 3, 5)$ .
- Se estivéssemos interessados em encontrar os parâmetros de um modelo de Lotka-Volterra clássico para produzir as trajetórias, poderíamos comparar as coordenadas de  $P_e$  com as do equilíbrio teórico,  $P = \left( \frac{b}{\beta}, \frac{a}{\alpha} \right)$ , para obter relações entre  $a, b, \alpha$  e  $\beta$ . Daí, usar ajustes para, finalmente encontrar cada um desses parâmetros.

- O conceito de equilíbrio de um sistema baseado em regras é o mesmo de equações diferenciais, isto é, estados cuja variação é nula. Porém, neste caso, a investigação de tal equilíbrio é realizada a partir da base de regras.
- Uma condição necessária e suficiente para a existência de pontos de equilíbrio é que haja mudança de sinal nos consequentes de uma base de regras ordenada, cujas funções de pertinência são contínuas.
- O estudo de estabilidade do equilíbrio seria realizado pelo método direto de Lyapunov, o qual se utiliza de uma função  $V(x)$  positiva definida, numa vizinhança  $U$  do equilíbrio  $\bar{x}$ . Tal método diz que, num equilíbrio  $\bar{x}$  devemos ter  $V(\bar{x}) = 0$ ,  $V(x) > 0$  para  $x$  em  $U \setminus \{\bar{x}\}$ . Assim,
  - Se  $V'(x) < 0$  em  $U \setminus \{\bar{x}\}$ , então o equilíbrio é assintoticamente estável;
  - Se  $V'(x) > 0$  em  $U \setminus \{\bar{x}\}$ , então o equilíbrio é instável.

Em um sistema baseado em regras fuzzy não temos em mãos o campo de direções  $f$ . Dessa forma, o estudo de estabilidade por meio do sinal dos autovalores do sistema linearizado torna-se inviável.

Esse foi o motivo que levou a explorar o método direto de Lyapunov introduzido em [3], já que a função  $V(x)$ , mesmo nas equações diferenciais clássicas, pode ser escolhida independentemente do conhecimento do campo  $f$ .

Para ilustrar essa metodologia vamos estudar o sistema SIS (suscetível-infectado-suscetível) com dinâmica vital e população total constante.

Essa hipótese faz com que  $S + I = N$  e, do ponto de vista de dinâmica, basta investigarmos a evolução de uma das classes, que a outra é obtida pelo complementar ( $I = N - S$ ).



Assim, adotaremos  $S$  como variável de estado e entrada do sistema fuzzy enquanto a variação específica  $\frac{1}{S} \frac{dS}{dt}$  é a saída do sistema.

O modelo epidemiológico SIS pressupõe que indivíduos não adquirem imunidade, isto é, cada infectado que se recupera passa a ser suscetível imediatamente.

Essa hipótese faz com que as regras sejam norteadas pelo seguinte raciocínio: quando o número de suscetíveis é pequeno, surgem poucos casos novos de infectados, o que contribui para que a classe de suscetíveis não diminua.

Além disso, como a população total é constante e todos os indivíduos nascem suscetíveis, a população de suscetíveis aumenta.

Por outro lado, à medida que o número de suscetíveis vai crescendo, novos casos da doença vão surgindo, de forma que a variação na classe de suscetíveis (embora ainda positiva) diminua.

Quando o número de suscetíveis é suficientemente grande (neste caso denominado como “alto”), o número de novos casos de infecção também cresce e isso faz com que a variação na classe dos indivíduos suscetíveis passe a ser negativa.

Resumidamente escolhemos as regras fuzzy abaixo para nosso sistema:

- |   |
|---|
| $R_1$ : <b>Se</b> $S$ for “baixo” ( $B$ ) <b>então</b> $\frac{1}{S} \frac{dS}{dt}$ é “alto positivo” ( $AP$ )         |
| $R_2$ : <b>Se</b> $S$ for “médio baixo” ( $mB$ ) <b>então</b> $\frac{1}{S} \frac{dS}{dt}$ é “baixo positivo” ( $bP$ ) |
| $R_3$ : <b>Se</b> $S$ for “médio alto” ( $mA$ ) <b>então</b> $\frac{1}{S} \frac{dS}{dt}$ é “baixo positivo” ( $bP$ )  |
| $R_4$ : <b>Se</b> $S$ for “alto” ( $A$ ) <b>então</b> $\frac{1}{S} \frac{dS}{dt}$ é “baixo negativo” ( $bN$ )         |

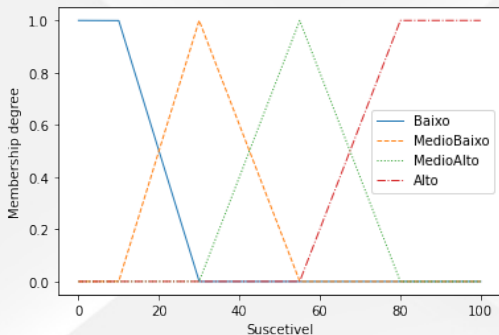


Figura: Funções de pertinência para S.

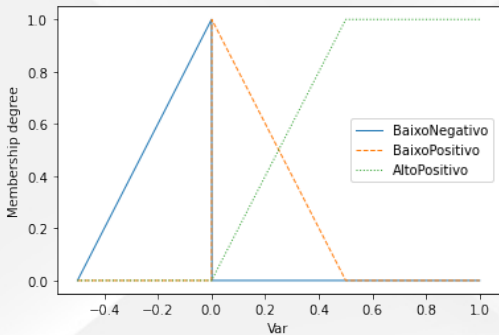


Figura: Funções de pertinência para  $\frac{1}{S} \frac{dS}{dt}$ .

Com as funções de pertinência escolhidas (contínuas) para os conjuntos fuzzy da base de regras, de acordo com [4], o estado de equilíbrio  $\bar{S}$  existe e é obtido pela intersecção entre os conjuntos fuzzy médio alto e alto, antecedentes das terceira e quarta regras.

Isso é consequência da troca de sinais nos consequentes dessas regras - baixo positivo e baixo negativo.

Assim,  $\bar{S} = 67,5$ . Mais ainda, como esses consequentes passam de positivo para negativo, a saída  $F(s)$  do sistema fuzzy é tal que, para  $s$  numa vizinhança  $U \setminus \{\bar{S}\}$ ,  $F(s) > 0$  se  $s < \bar{S}$  e  $F(s) < 0$  se  $s > \bar{S}$ .

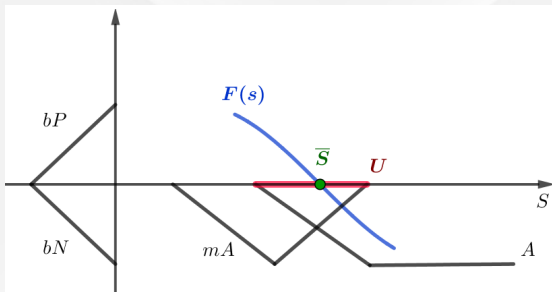


Figura: Vizinhança  $U$  em que a saída  $F(s)$  do sistema fuzzy troca de sinal.

Note que  $V(s) = \left(\frac{1}{2}\right) (s - \bar{S})^2$  é uma função positiva definida e  $V'(s) = \nabla V(s)F(s) = (s - \bar{S})F(s) < 0$  para todo  $s$  em  $U \setminus \{\bar{S}\}$ .

Assim,  $\bar{S}$  é um ponto de equilíbrio assintoticamente estável. Consequentemente, a doença tende a se estabilizar no equilíbrio  $(\bar{S}, N - \bar{S})$ .

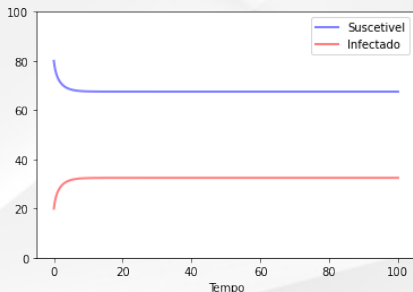


Figura: Evolução temporal dos suscetíveis e infectados com condições iniciais  $S(0) = 80$  e  $I(0) = 20$ .

O método de inferência fuzzy adotado neste trabalho foi de Mamdani, no entanto queremos ressaltar que o método de inferência de Takagi-Sugeno também poderia ser utilizado.

Nesse caso, pode se ter explicitamente a saída do controlador, representando o campo de direções da equação diferencial, e aí a metodologia aqui proposta ficaria semelhante à que se encontra na literatura de equações diferenciais, com a observação que o equilíbrio seria obtido via base de regras.

O estudo da estabilidade dos estados de equilíbrio poderia ser feito por meio da linearização da saída do sistema fuzzy, uma vez que o método de Takagi-Sugeno fornece explicitamente tal saída.



No caso do modelo SIS com população total constante e dinâmica vital, a metodologia utilizada pode facilitar a estimativa de importantes parâmetros epidemiológicos, que determinam sob quais condições a doença se propaga na população.

A obtenção desses parâmetros nos modelos determinísticos clássicos envolve o conhecimento de taxas nem sempre fáceis de serem medidas (como a taxa de contato, por exemplo).

A partir de taxas demográficas e valores conhecidos para uma doença específica (como taxa de recuperação), podemos estimar o valor de reprodutibilidade basal a partir das funções de pertinência, que nos modelos determinísticos envolve o conhecimento das taxas de natalidade, recuperação e contato.

- [1] L. C. Barros and R. C. Bassanezi (2021)  
**Tópicos de lógica fuzzy e biomatemática.**  
*Grupo de Biomatemática, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica (IMECC), Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP).*
- [2] R. S. M. Jafelice and L. C. Barros and R. C. Bassanezi (2012)  
**Usando a Teoria dos Conjuntos Fuzzy na Modelagem de Fenômenos Biológicos**  
*Congresso Brasileiro de Sistemas Fuzzy.*
- [3] Barros, L. C., Leite, M. B. F., Oliveira, R. Z. G. e Bassanezi, R. C. (2009)  
**Estabilidade de sistemas baseados em regras fuzzy e a função de Lyapunov.**  
*Biomatemática IMECC-UNICAMP, 19, 1-10.*
- [4] M.S. Cecconello, J.D.M. Silva e R. C. Bassanezi (2010)  
**Sistemas Dinâmicos Fuzzy: Modelagens Alternativas Para Sistemas Biológicos.**  
*Notas em Matemática Aplicada, Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional.*

Esse é um dos primeiros modelos epidemiológicos conhecido, proposto em 1927 por Kermack e MC Kendrick, alguns anos após a ferosa epidemia da gripe espanhola de 1918.

O modelo matemático determinístico é dado pelo conjunto de equações diferenciais

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dS}{dt} = -\beta SI \\ \frac{dI}{dt} = \beta SI - \gamma I \\ \frac{dR}{dt} = -\gamma I \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{S} \frac{dS}{dt} = -\beta I \\ \frac{1}{I} \frac{dI}{dt} = \beta S - \gamma \\ \frac{dR}{dt} = -\gamma I \end{array} \right. \quad (22)$$

onde  $S$ ,  $I$  e  $R$  representam os números de suscetíveis, infectados e recuperados, respectivamente. Os parâmetros  $\beta$  e  $\gamma$  representam as taxas de contato e recuperação, respectivamente.

As equações acima pressupõe que o modelo SIR é sem dinâmica vital e a população total ( $N$ ) é constante, onde  $N = S + I + R$ .

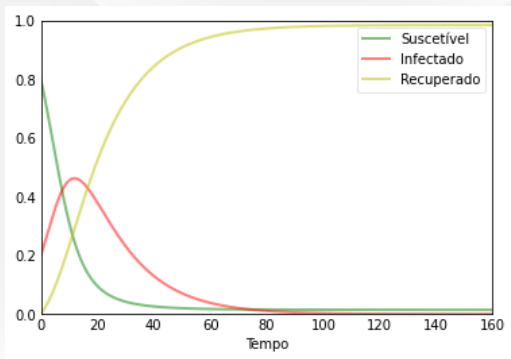


Figura: Solução do modelo SIR clássico.

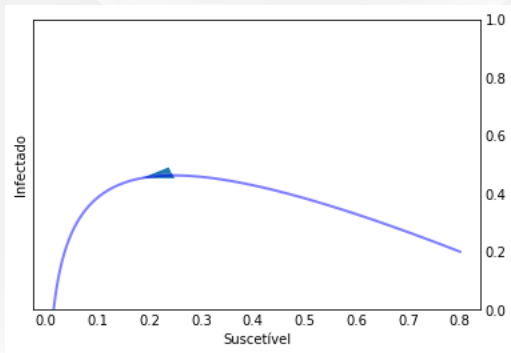


Figura: Plano de fase do modelo clássico SIR.

# Modelo Epidemiológico SIR via p-fuzzy

Nas figuras anteriores vemos as curvas das proporções de suscetíveis, infectados e recuperados do modelo (22), com  $\beta = 0.27$  e  $\gamma = 1/15$ , bem como o plano de fase do modelo (22).

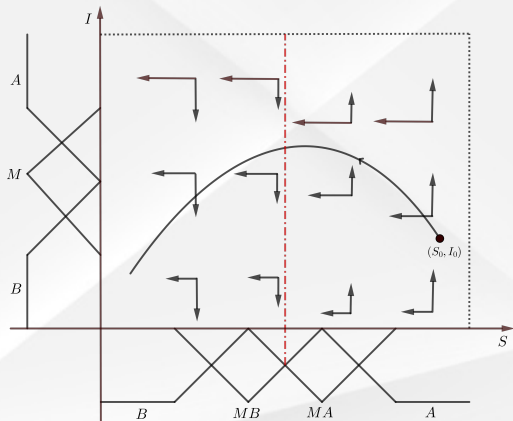


Figura: Representação gráfica da base de regras na forma de vetores de direções.

Se  $S$  é  $A$  e  $I$  é  $B$  então  $\frac{1}{S} \frac{dS}{dt}$  é  $BN$  e  $\frac{1}{I} \frac{dI}{dt}$  é  $AP$

Se  $S$  é  $A$  e  $I$  é  $M$  então  $\frac{1}{S} \frac{dS}{dt}$  é  $MN$  e  $\frac{1}{I} \frac{dI}{dt}$  é  $AP$

Se  $S$  é  $A$  e  $I$  é  $A$  então  $\frac{1}{S} \frac{dS}{dt}$  é  $AN$  e  $\frac{1}{I} \frac{dI}{dt}$  é  $AP$

Se  $X$  é  $MA$  e  $I$  é  $B$  então  $\frac{1}{S} \frac{dS}{dt}$  é  $BN$  e  $\frac{1}{I} \frac{dI}{dt}$  é  $BP$

Se  $S$  é  $MA$  e  $I$  é  $M$  então  $\frac{1}{S} \frac{dS}{dt}$  é  $MN$  e  $\frac{1}{I} \frac{dI}{dt}$  é  $BP$

Se  $S$  é  $MA$  e  $I$  é  $A$  então  $\frac{1}{S} \frac{dS}{dt}$  é  $AN$  e  $\frac{1}{I} \frac{dI}{dt}$  é  $BP$

Se  $S$  é  $MB$  e  $I$  é  $B$  então  $\frac{1}{S} \frac{dS}{dt}$  é  $BN$  e  $\frac{1}{I} \frac{dI}{dt}$  é  $BN$

Se  $S$  é  $MB$  e  $I$  é  $M$  então  $\frac{1}{S} \frac{dS}{dt}$  é  $MN$  e  $\frac{1}{I} \frac{dI}{dt}$  é  $BN$

Se  $S$  é  $MB$  e  $I$  é  $A$  então  $\frac{1}{S} \frac{dS}{dt}$  é  $AN$  e  $\frac{1}{I} \frac{dI}{dt}$  é  $BN$

Se  $S$  é  $B$  e  $I$  é  $B$  então  $\frac{1}{S} \frac{dS}{dt}$  é  $BN$  e  $\frac{1}{I} \frac{dI}{dt}$  é  $AN$

Se  $S$  é  $B$  e  $I$  é  $M$  então  $\frac{1}{S} \frac{dS}{dt}$  é  $MN$  e  $\frac{1}{I} \frac{dI}{dt}$  é  $MN$

Se  $S$  é  $B$  e  $I$  é  $A$  então  $\frac{1}{S} \frac{dS}{dt}$  é  $AN$  e  $\frac{1}{I} \frac{dI}{dt}$  é  $AN$



Para o modelo p-fuzzy vamos estudar apenas as primeiras duas equações. O número de recuperados será obtido separadamente substituindo  $I$  na terceira equação.

Nas primeiras duas equações cada variação específica depende da outra.

Assim, para cada  $I$  fixo,  $\frac{1}{S} \frac{dS}{dt}$  também é fixo. Consequentemente, para cada  $S$  fixo,  $\frac{1}{I} \frac{dI}{dt}$  é fixo.

A base de regras é baseada nas taxas específicas de variação por unidade de tempo, indicadas por  $\frac{1}{S} \frac{dS}{dt}$  e  $\frac{1}{I} \frac{dI}{dt}$ , dependendo da população  $S$  e  $I$ .

Para as variáveis de entrada, temos os seguintes conjuntos fuzzy:

- Suscetíveis: *Alto (A)*, *Médio Alto (MA)*, *Médio Baixo (MB)* e *Baixo (B)*.
- Infectados: *Alto (A)*, *Médio (M)* e *Baixo (B)*.

Para as variáveis de saída, temos os seguintes conjuntos fuzzy:

- Variação Suscetíveis: *Alta Negativa (AN)*, *Média Negativa (MN)* e *Baixa Negativa (BN)*.
- Variação Infectados: *Alta Negativa (AN)*, *Média Negativa (MN)*, *Baixa Negativa (BN)*, *Alta Positiva (AP)* e *Baixa Positiva (BP)*.

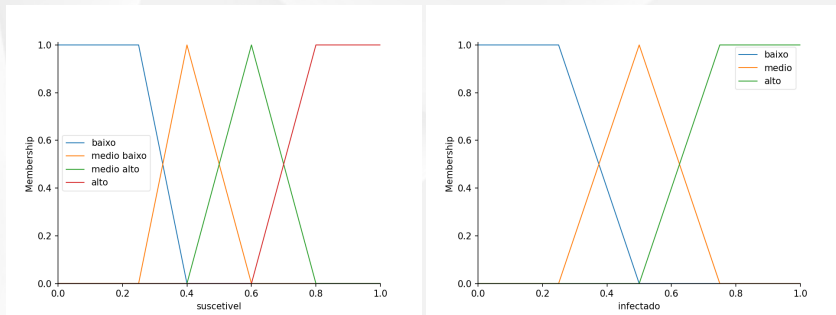


Figura: Conjuntos fuzzy nos antecedentes.

# Modelo Epidemiológico SIR via p-fuzzy

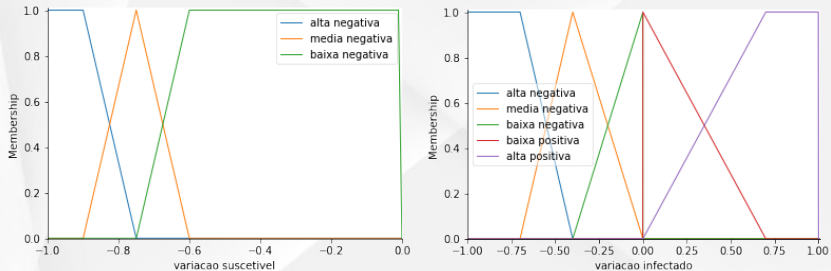


Figura: Conjuntos fuzzy nos consequentes.

Como as saídas são  $\frac{1}{S} \frac{dS}{dt}$  e  $\frac{1}{I} \frac{dI}{dt}$ , devemos multiplicá-las pelas entradas  $S$  e  $I$ , respectivamente, para obter  $\frac{dS}{dt}$  e  $\frac{dI}{dt}$ .

Para fins de ilustração, optamos pelo método de Euler obtendo as estimativas da seguinte forma:

$$S_{n+1} = S_n + h S_n \text{SBRF}_f(S_n, I_n)$$

$$I_{n+1} = I_n + h I_n \text{SBRF}_g(S_n, I_n)$$

$$R_{n+1} = R_n - h [S_n \text{SBRF}_f(S_n, I_n) + I_n \text{SBRF}_g(S_n, I_n)]$$

sendo que  $h$  é a etapa e  $\text{SBRF} = (\text{SBRF}_f, \text{SBRF}_g)$  é a saída produzida pelo controlador fuzzy.

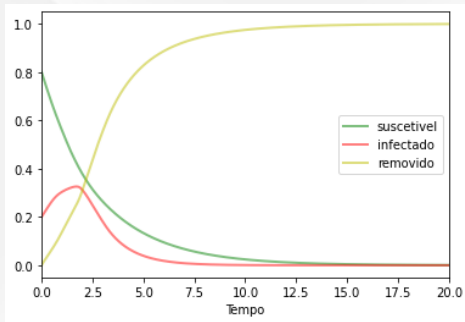


Figura: Solução do modelo SIR p-fuzzy com  $S_0 = 0,8$ ,  $I_0 = 0,2$  e  $R_0 = 0$ .

Para este caso, usamos o método de Euler com  $h = 0,001$ ,  $t_0 = 0$ ,  $S_0 = 0,8$ ,  $I_0 = 0,2$  e  $R_0 = 0$ .

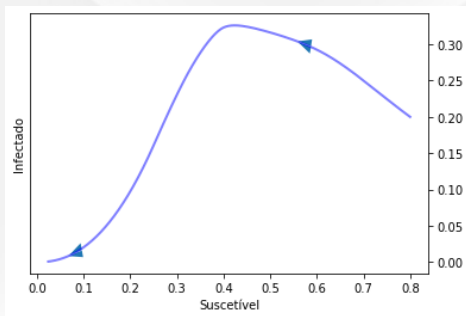
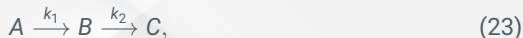


Figura: Plano de fase do modelo SIR *p*-fuzzy com  $S_0 = 0,8$ ,  $I_0 = 0,2$  e  $R_0 = 0$ .

Reações químicas são dadas basicamente por transformações que envolvem uma ou mais substâncias (reagentes) que resultam em uma nova substância (produto) com diferentes propriedades que as anteriores.

Nessa aplicação focamos em um modelo de reação química consecutiva, isto é, reações químicas da seguinte forma



com taxas de reações  $k_1$  e  $k_2$ .

Esse processo químico pode ser descrito pelo seguinte PVI [2]

$$\begin{cases} \frac{d[A]}{dt} = -k_1[A], & [A(0)] = [A_0] \\ \frac{d[B]}{dt} = k_1[A] - k_2[B], & [B(0)] = [B_0], \\ \frac{d[C]}{dt} = k_2[B], & [C(0)] = [C_0] \end{cases}, \quad (24)$$

em que  $[X]$  representa a concentração do reagente  $X$ .



Alternativamente podemos estimar soluções de (24) por meio de um sistema p-fuzzy dado por

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dA}{dt} = \text{SBRF}_{f_1}(A) \quad A(0) = [A_0] \\ \frac{dB}{dt} = \text{SBRF}_{f_2}(A, B) \quad B(0) = [B_0] \\ \frac{dC}{dt} = \text{SBRF}_{f_3}(B) \quad C(0) = [C_0] \end{array} \right. \quad (25)$$

Adotamos que as variáveis de entrada (antecedente) assumem 4 classificações linguísticas e que as de saída (consequente) assumem 6 classificações.

	<b>Antecedente</b>	<b>Consequente</b>
1.	<i>"baixo"</i> ( $A_1$ e $B_1$ )	<i>"negativo alto"</i> ( $N_3$ )
2.	<i>"médio baixo"</i> ( $A_2$ e $B_2$ )	<i>"negativo médio"</i> ( $N_2$ )
3.	<i>"médio alto"</i> ( $A_3$ e $B_3$ )	<i>"negativo baixo"</i> ( $N_1$ )
4.	<i>"alto"</i> ( $A_4$ e $B_4$ )	<i>"positivo baixo"</i> ( $P_1$ )
5.		<i>"positivo médio"</i> ( $P_2$ )
6.		<i>"positivo alto"</i> ( $P_3$ )

# Modelo de reação química via p-fuzzy

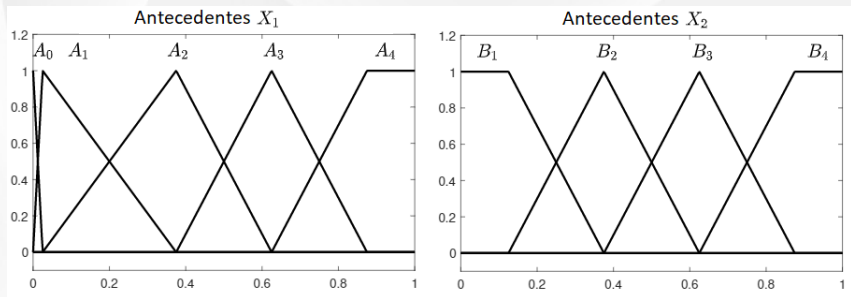
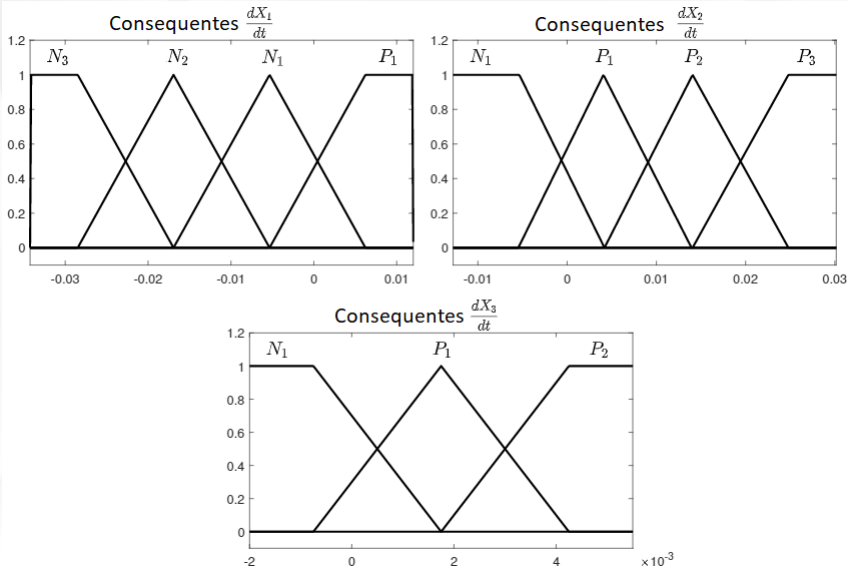


Figura: Antecedentes do sistema baseado em regras fuzzy para o modelo de reações químicas consecutivas.

# Modelo de reação química via p-fuzzy



# Modelo de reação química via p-fuzzy

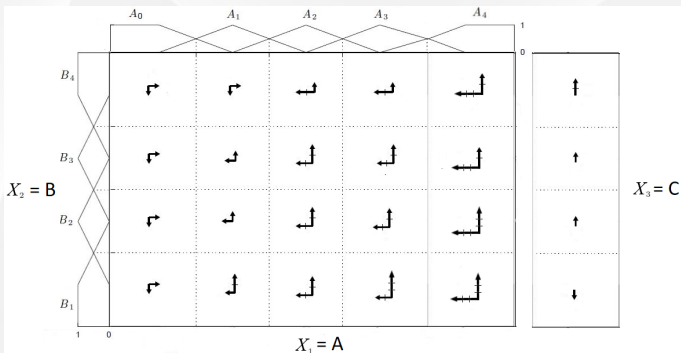


Figura: Representação gráfica das regras fuzzy baseada no campo de direções do modelo de reações químicas consecutivas. As setas representam as direções e magnitudes das taxas de variação.

# Modelo de reação química via p-fuzzy

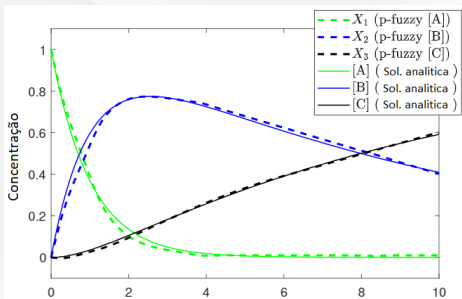


Figura: Soluções analítica e via p-fuzzy do PVI dado em (24) com  $[A_0] = 1$ ,  $[B_0] = 0$  e  $[C_0] = 0$ .

Em termos gerais, o modelo proposto por Goodwin consiste em um par de equações diferenciais ordinárias que descrevem a interação dinâmica entre os níveis de emprego ( $v$ ) e a distribuição da renda em uma economia, expressa pela parcela salarial ( $u$ ), em um contexto de crescimento econômico.

O modelo de Goodwin estrutura-se a partir de sete premissas:

- 1) Constante progresso técnico;
- 2) Crescimento constante da força de trabalho;
- 3) Somente são empregados dois fatores de produção (trabalho e capital) ambos homogêneos e não específicos;
- 4) Todas as quantidades são reais e líquidas;
- 5) Todos os salários são consumidos, e todos os lucros são poupados e reinvestidos;
- 6) A razão capital produto é constante;
- 7) A taxa de salário real é crescente na vizinhança do pleno emprego.

Tais premissas se resumem no seguinte sistema de equações

$$\begin{cases} \frac{1}{v} \frac{dv}{dt} = \left( \frac{1}{\sigma} - \alpha - \beta \right) - \frac{1}{\sigma} u \\ \frac{1}{u} \frac{du}{dt} = -(\gamma + \alpha) + \rho v. \end{cases}, \quad (26)$$

onde

- $v$  é o nível de emprego;
- $u$  é o nível salarial;
- $\alpha$  é a taxa de crescimento exógeno na produtividade do trabalho;
- $\beta$  é a taxa de crescimento exógeno da população;
- $\sigma$  é a relação capital-produto;
- $\gamma$  e  $\rho$  são parâmetros econômicos.

As premissas do modelo de Goodwin apresentam a mesma propriedade do modelo de Lotka-Volterra:

*“dado o valor de uma variável, a taxa específica da outra é constante”* (27)

Cada uma das variáveis de entrada  $V$  e  $U$  é classificada nos subconjuntos fuzzy *baixo* ( $A_1$  e  $B_1$ ), *médio baixo* ( $A_2$  e  $B_2$ ), *médio alto* ( $A_3$  e  $B_3$ ) e *alto* ( $A_4$  e  $B_4$ ).

As variáveis de saída assumem os termos *negativa* ( $N_2$ ), *negativa baixa* ( $N_1$ ), *positiva baixa* ( $P_1$ ) e *positiva* ( $P_2$ ).



# Modelo econômico de Goodwin via p-fuzzy

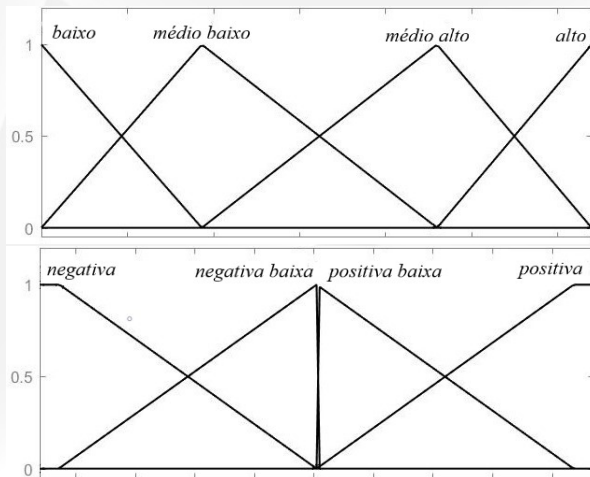


Figura: Conjuntos fuzzy nos antecedentes (subfigura acima) e nos consequentes (subfigura abaixo).

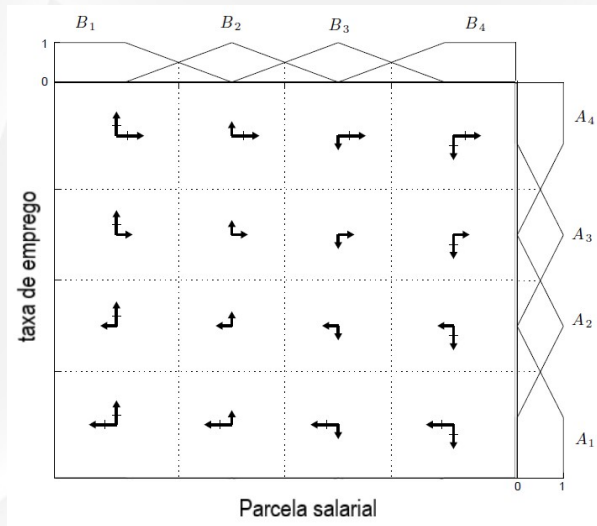


Figura: Representação gráfica da base de regras na forma de vetores de direções.

$R_1$ : Se  $V$  é  $A_1$  e  $U$  é  $B_1$  então  $\frac{1}{V} \frac{dV}{dt}$  é  $P_2$  e  $\frac{1}{U} \frac{dU}{dt}$  é  $N_2$ .

$R_2$ : Se  $V$  é  $A_2$  e  $U$  é  $B_1$  então  $\frac{1}{V} \frac{dV}{dt}$  é  $P_2$  e  $\frac{1}{U} \frac{dU}{dt}$  é  $N_1$ .

⋮ ⋮ ⋮

$R_8$ : Se  $V$  é  $A_4$  e  $U$  é  $B_2$  então  $\frac{1}{V} \frac{dV}{dt}$  é  $P_1$  e  $\frac{1}{U} \frac{dU}{dt}$  é  $P_2$ .

$R_9$ : Se  $V$  é  $A_1$  e  $U$  é  $B_3$  então  $\frac{1}{V} \frac{dV}{dt}$  é  $N_1$  e  $\frac{1}{U} \frac{dU}{dt}$  é  $N_2$ .

⋮ ⋮ ⋮

$R_{15}$ : Se  $V$  é  $A_3$  e  $U$  é  $B_4$  então  $\frac{1}{V} \frac{dV}{dt}$  é  $N_2$  e  $\frac{1}{U} \frac{dU}{dt}$  é  $P_1$ .

$R_{16}$ : Se  $V$  é  $A_4$  e  $U$  é  $B_4$  então  $\frac{1}{V} \frac{dV}{dt}$  é  $N_2$  e  $\frac{1}{U} \frac{dU}{dt}$  é  $P_2$ .

Figura: Regras fuzzy usadas para o modelo de Goodwin.

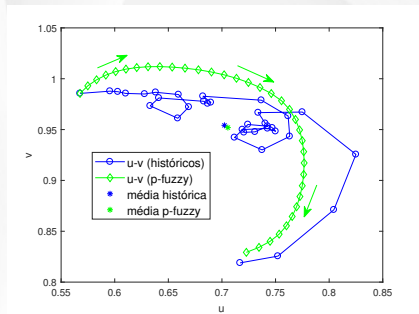
A partir da base de regras proposta e do método de Mamdani, as trajetórias para  $u$  e  $v$  são dadas numericamente por

$$\begin{cases} v_{n+1} = v_n + hv_n SBRF_v(v_n, u_n) \\ u_{n+1} = u_n + hu_n SBRF_u(v_n, u_n) \end{cases} .$$

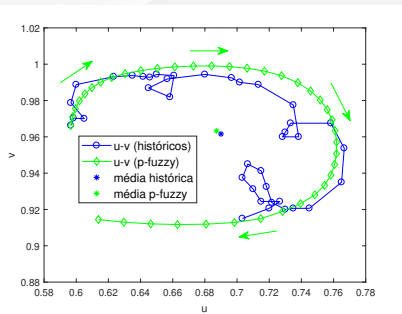
Consideremos o sistema  $p$ -fuzzy para simular o comportamento dinâmico das variáveis  $u$  e  $v$  para as economias da Finlândia e da Alemanha.

# Modelo econômico de Goodwin via $p$ -fuzzy

Os diagramas de fase da solução  $p$ -fuzzy (para  $u$  e  $v$ ) e dos dados econômicos históricos da Finlândia (de 1960 até 1994) e para Alemanha (de 1956 até 1994) são apresentados abaixo.



(a) Solução  $p$ -fuzzy para dados econômicos da Finlândia entre 1960 e 1994.



(b) Solução  $p$ -fuzzy para dados econômicos da Alemanha entre 1956 e 1994.

Figura: Soluções  $p$ -fuzzy para o modelos de Goodwin.

- [1] L. C. Barros and R. C. Bassanezi (2021)  
**Tópicos de lógica fuzzy e biomatemática.**  
*Grupo de Biomatemática, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica (IMECC), Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP).*
- [2] R. S. M. Jafelice and L. C. Barros and R. C. Bassanezi (2012)  
**Usando a Teoria dos Conjuntos Fuzzy na Modelagem de Fenômenos Biológicos**  
*Congresso Brasileiro de Sistemas Fuzzy.*
- [3] Sánchez, D. E., Esmi, E. and Barros, L. C. (2019)  
**Discrete and Continuous Logistic p-Fuzzy Models**  
*Springer International Publishing, Cham, 556–566.*

- [1] M. S. Peixoto, L. C. Barros e R. C. Bassanezi (2004)  
**Um modelo Fuzzy Presa-Predador em citros: pulgões e joaninhas**  
*Biomatemática IMECC - UNICAMP*, 14, 29-38.
- [2] D. E. Sánchez, V. F. Wasques, E. Esmi e L. C. Barros (2019)  
**Consecutive Chemical Reactions Models via P-Fuzzy Systems**  
*Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics*, 1–7.
- [3] D. Sanchez and L. C. Barros and E. Esmi and A. D. Miebach (2019)  
**Goodwin model via p-fuzzy system**  
*Data Science and Knowledge Engineering for Sensing Decision Support*, 977-984.

## Obrigado!

